Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5335

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

1. Justifier que : $\forall x \in \left]-1;1\right],\ \ln(1+x) = S_{n+1}(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la convergence des deux suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $x \in \left]-1;1\right[$. Démontrer que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Montrer et que l'on a :
$$\forall x \in \left]-1;1\right],\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$
5. Si $x \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left]1;+\infty\right[$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
6. Justifier les deux formules suivantes :

Formule 1

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Formule 2

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5334

Dans tout ce qui suit, n désignera un entier naturel non nul.
Toutes les variables aléatoires que l'on considèrera sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On place n boules dans n boîtes numérotées de 1 à n selon le protocole suivant : chaque boule est placée uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte pouvant donc contenir plus boules).
Si U_i désigne le numéro de la boîte contenant la boule numéro i, les variables aléatoires U_i sont ainsi indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans la boîte n° i et $N = \sup(N_1,\ldots,N_n)$, c'est à dire que N désigne donc le plus grand nombre de boules contenues dans une des n boîtes.

1. **a.** Déterminer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la loi de la variable aléatoire N_i.
   b. Les variables N_1, ..., N_n sont-elles indépendantes ?
2. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs et de limite $+\infty$ telle que, pour tout entier k non nul :
$$\left(\frac{\mathrm{e}}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k} = \frac{1}{k^3}$$
Pour tout la suite, on admettra que : $\displaystyle\frac{\alpha_n \ln(\ln(n))}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
3. Montrer que N admet une espérance et que, pour tout $\alpha \in [1;n]$, on a : $\mathbb{E}(N) \leq n\mathbb{P}([N > \alpha]) + \alpha$.
4. **a.** Établir que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a : $\mathbb{P}([N=k]) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([N_i = k]) \leq \frac{n}{k!}$

b. Montrer que pour tout entier non nul k, on a : $\dfrac{1}{k!} \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{k}\right)^k$.

c. En déduire que, pour tout $\alpha \in [1; n]$, on a : $\mathbb{P}([N > \alpha]) \leq n^2 \left(\dfrac{\mathrm{e}}{\alpha}\right)^\alpha$.