Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5255] | 1| Changement de bases pour un endomorphisme

Dans tout cet exercice, on désigne par u et v les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u=(1,1,1)$ et $v=(1,0,1)$.

On considère alors l'application f définie par :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z)u+(x+2y+z)v\end{array}\right.$$

et on désigne par $\mathcal{B}_3=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_3$.

(3). On considère la famille de vecteurs $\mathcal{C}=(u_1,u_2,u_3)$ donnée par $u_1=(-3,1,-3)$, $u_2=(1,0,1)$ et $u_3=(3,-2,1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{C}$, puis calculer P^{-1}.

(5). On note alors B la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer B à l'aide de la formule de changement de base pour les endomorphismes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5253] | 2| Application linéaire

On désigne par F_1 et F_2 les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F_1=\{(x,y,z,t)\,,\ x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+z-t=0\}\ F_2=\operatorname{Vect}\left((1,1,1,1)\,,(1,0,0,0)\right)$$

(1). Démontrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une base de F_1 et donner une base de F_2. En préciser leur dimension.

(3). Soit $u\in\mathbb{R}^4$ un vecteur quelconque fixé.
Montrer qu'il existe un unique couple $(f_1,f_2)\in F_1\times F_2$ tel que $u=f_1+f_2$, et le déterminer en fonction des composantes du vecteur u.

(4). On considère alors l'application f définie par :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4\\ u & \longmapsto & f_1-f_2\end{array}\right.$$

où f_1 et f_2 sont les vecteurs définis à la question précédente pour un vecteur u quelconque de $\mathbb{R}^4$.

(a). Montrer que f est une application linéaire.

(b). Déterminer le noyau de f. Qu'en déduire pour f ?

(c). Démontrer alors que $F_1=\operatorname{Ker}(f-\operatorname{Id})$ et que $F_2=\operatorname{Ker}(f+\operatorname{Id})$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^4$.

(d). On désigne par $\mathcal{B}$ la famille obtenue par concaténation de la base de F_1 et de la base de F_2 trouvée à la question **(2)**.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(e). Déterminer alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

(5). On désigne alors par $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(a). Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_4$ à la base $\mathcal{B}$.

(b). À l'aide des formules de changement de bases pour les endomorphismes, donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_4$.