Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2197

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = 4X^7 - 16X^6 + 9X^5 + 15X^4 + 15X^3 - 18X^2 - 28X - 8$$

1. Soit Q le polynôme donné par $Q = X^2 + X + 1$.
   - **a.** Effectuer la division euclidienne de P par Q.
   - **b.** Qu'en conclure ?
2. Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.
3. Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2197

1. **a.** Effectuer ce qui est demander... sans se tromper !
   - **b.** Comment interprète-t-on le reste d'une division euclidienne ?
2. Utiliser peut-être le théorème liant dérivée et ordre de multiplicité d'une racine pour aller plus vite.
3. Aller jusqu'au bout de la factorisation en n'oubliant pas de factoriser si possible les éventuels polynômes de degré 2 qui apparaissent.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2164

1. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1} \arctan(x)\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$.
   - **b.** En déduire une primitive sur $[0;1]$ de la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{x^4}{x^2+1}$.
   - **c.** Calculer alors I à l'aide d'une intégration par parties.
2. On pose $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(x) - \cos(x) + \sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$.
   - **a.** **i.** À l'aide de vos formules de trigonométrie, montrer que :

     pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

     ii. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ puis de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
   - **b.** Calculer la dérivée de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour tout $x \in]0;\pi[$.
   - **c.** Justifier que : $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\sin(x) - \cos(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
   - **d.** Calculer alors J à l'aide du changement de variables $u = x + \dfrac{\pi}{4}$ et d'un autre qu'il conviendra de définir.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2164

1. **a.** Montrer que deux expressions constituées de quotients sont égales.
   b. Exploiter une transformation d'écriture pour déterminer une primitive d'une fonction.
   c. Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties.
2. **a.** **i.** Manipuler les formules de trigonométrie, notamment celles de duplication des arcs.
   ii. Calculer la valeur exacte d'un cosinus ou sinus d'un à l'aide d'une formule de trigonométrie.
   b. Calculer la dérivée d'une fonction.
   c. Manipuler les formules de trigonométrie.
   d. Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variables.