Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5335

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$.

1. Justifier que : $\forall x \in \left]-1;1\right],\ \ln(1+x) = S_{n+1}(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
2. Étudier la convergence des deux suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $x \in \left]-1;1\right[$. Démontrer que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Montrer et que l'on a :
$$\forall x \in \left]-1;1\right],\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$
5. Si $x \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left]1;+\infty\right[$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
6. Justifier les deux formules suivantes :

Formule 1

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Formule 2

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5335

1. On remarquera que la dériée de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$, expression que l'on pourra voir comme la somme d'une progression géométrique qu'il restera à intégrer par linéarité de l'intégrale.
2. On montrera que l'une est croissante, que l'autre est décroissante et que la différence $S_{2n+1}(1) - S_{2n}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour conclure ...
3. Étudier la convergence de cette suite, revient à justifier la convergence d'une série, dont on pourra par exemple étudier l'absolue convergence à l'aide du critère de d'Alembert.
4. L'expression de $\ln(1+x)$ comme somme d'une série s'obtiendra par passage à la limite dans la relation obtenue à la question précdente en majorant notamment l'intégrale présente grâce à la croissance de l'intégrale, par un terme qui tend vers 0.
5. Il risque d'y avoir divergence grossière...
6. La formule obtenu précédemment est vraie pour $x = 1$ ce qui donnera la première. Pour la deuxième, on appliquera la même formule pour $x = -\dfrac{1}{2}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5334

Dans tout ce qui suit, n désignera un entier naturel non nul.
Toutes les variables aléatoires que l'on considèrera sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On place n boules dans n boîtes numérotées de 1 à n selon le protocole suivant : chaque boule est placée uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte pouvant donc contenir plus boules).
Si U_i désigne le numéro de la boîte contenant la boule numéro i, les variables aléatoires U_i sont ainsi indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans la boîte n° i et $N = \sup(N_1, \ldots, N_n)$, c'est à dire que N désigne donc le plus grand nombre de boules contenues dans une des n boîtes.

1. **a.** Déterminer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la loi de la variable aléatoire N_i.

   b. Les variables N_1, …, N_n sont-elles indépendantes ?

2. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs et de limite $+\infty$ telle que, pour tout entier k non nul :
$$\left(\frac{\mathrm{e}}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k} = \frac{1}{k^3}$$
   Pour tout la suite, on admettra que : $\dfrac{\alpha_n \ln(\ln(n))}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3.$

3. Montrer que N admet une espérance et que, pour tout $\alpha \in [1;n]$, on a : $\mathbb{E}(N) \leq n\mathbb{P}([N > \alpha]) + \alpha.$

4. **a.** Établir que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a : $\mathbb{P}([N = k]) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([N_i = k]) \leq \frac{n}{k!}$

   b. Montrer que pour tout entier non nul k, on a : $\dfrac{1}{k!} \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{k}\right)^k.$

   c. En déduire que, pour tout $\alpha \in [1;n]$, on a : $\mathbb{P}([N > \alpha]) \leq n^2 \left(\dfrac{\mathrm{e}}{\alpha}\right)^{\alpha}.$

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5334

1. **a.** Un processus relevant d'une loi binomiale est à mettre en évidence.

   b. On mettra en défaut l'indépendance en étudiant les événements $[N_1 = n]$ et $[N_2 = n]$.

2. On construira la suite demandée comme solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{k^3}$ où $f : t \longmapsto \left(\dfrac{\mathrm{e}}{t}\right)^t$ et on n'oubliera pas d'en étudier la limite en utilisant la définition de cette suite et les variations de f.

3. N est à support fini…et on décomposera le calcul de $\mathbb{E}(N)$ comme on peut le faire dans la démonstration de l'inégalité de Markov au regard de la valeur α.

4. **a.** On pourra remarquer que $[N = k] \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [N_i = k]$

   b. On pourra utiliser les propriétés connues d'une loi de Poisson…

   c. On explicitera $\mathbb{P}([N > \alpha])$ comme somme de probabilités portant sur N en tenant compte du fait que α n'est pas nécessairement entier lors de la détermination des indices de sommation, puis on utilisera les majorations obtenues précédemment.