Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2197

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = 4X^7 - 16X^6 + 9X^5 + 15X^4 + 15X^3 - 18X^2 - 28X - 8$$

1. Soit Q le polynôme donné par $Q = X^2 + X + 1$.
- **a.** Effectuer la division euclidienne de P par Q.
- **b.** Qu'en conclure ?

2. Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.

3. Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2197

1. **a.** On pose la division de P par Q pour obtenir : $P = \left(X^2 + X + 1\right)\left(4X^5 - 2X0^4 + 25X^3 + 10X^2 - 20X - 8\right) + 0$

b. Le polynôme P est donc divisible par le polynôme Q, et en terme de factorisaton, cela se traduit par $P = Q \times P_1$ où $P_1 \in \mathbb{R}_5[X]$.

2.
- En notant $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée à P, il vient :

$$\tilde{P}(2) = 4 \times 2^7 - 16 \times 2^6 + 9 \times 2^5 + 15 \times 2^4 + 15 \times 2^3 - 18 \times 2^2 - 28 \times 2 - 8 = \ldots = 0$$

  Par suite 2 est bien racine de P.
- On s'intéresse auX dérivées successives P', P", etc. de P, et on va vérifier si 2 est racine ou non de ces derniers.
  On a : $P' = 28X^6 - 96X^5 + 45X^4 + 60X^3 + 45X^2 - 36X - 28$ et on montre que $\tilde{P}'(2) = 0$.
  De même : $P'' = 168X^5 - 480X^4 + 180X^3 + 180X^2 + 90X - 36$ et on montre que $\tilde{P}''(2) = 0$.
  Par contre : $P''' = 840X^4 - 1920X^3 + 540X^2 + 360X + 90$ et on montre que $\tilde{P}'''(2) \neq 0$.
  Par conséquent 2 est racine de P avec pour ordre de multiplicité 3.

3. On déduit des questions précédentes que P peut s'écrire sous la forme $P = \left(X^2 + X + 1\right)(X-1)^3 \times P_2(X)$ où P_2 est un polynôme de degré 2.
Par ailleurs, le polynôme $X^2 + X + 1$ étant de degré 2 à discriminant strictement négatif, ce dernier est irréductible dans $\mathbb{R}$.
Division alors P par le polynôme $\left(X^2 + X + 1\right)(X-1)^3 = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ pour obtenir P_2.
On en déduit donc que : $P = \left(X^2 + X + 1\right)(X-2)^2\left(4X^2 + 4X + 1\right)$.
Or le polynôme $4X^2 + 4X + 1$ est un polynôme de degré 2 à discriminant nul et de racine double $-\dfrac{1}{2}$. Il est donc factorisable dans $\mathbb{R}[X]$ par : $4X^2 + 4X + 1 = 4\left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2$.
Finalement : $P = 4\left(X^2 + X + 1\right)(X-2)^2\left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|l}
4X^7 & - & 16X^6 & + & 9X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & X^2+X+1 \\
\cline{16-16}
 & & & & & & & & & & & & & & & 4X^5-2X0^4+25X^3+10X^2-20X-8 \\
4X^7 & + & 4X^6 & + & 4X^5 & & & & & & & & & & & \\
\cline{1-15}
 & - & 20X^6 & + & 5X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & - & 20X^6 & - & 20X^5 & - & 20X^4 & & & & & & & & & \\
\cline{2-15}
 & & & & 25X^5 & + & 35X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & & & & 25X^5 & + & 25X^4 & + & 25X^3 & & & & & & & \\
\cline{5-15}
 & & & & & & & & 10X^4 & - & 10X^3 & - & 18X^2 & - & 28X\ -8 & \\
 & & & & & & & & 10X^4 & + & 10X^3 & & +10X^2 & & & \\
\cline{7-15}
 & & & & & & & & & - & 20X^3 & - & 28X^2 & - & 28X\ -8 & \\
 & & & & & & & & & - & 20X^3 & - & 20X^2 & - & 20X & \\
\cline{9-15}
 & & & & & & & & & & - & 8X^2 & - & 8X & -\ 8 & \\
 & & & & & & & & & & - & 8X^2 & - & 8X & -\ 8 & \\
\cline{11-15}
 & & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|l}
4X^7 & - & 16X^6 & + & 9X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & X^5-5X^4+7X^3-2X^2+4X-8 \\
\cline{16-16}
4X^7 & - & 20X^6 & + & 28X^5 & - & 8X^4 & + & 16X^3 & - & 32X^2 & & & & & 4X^2+4X+1 \\
\cline{1-15}
 & & 4X^6 & - & 19X^5 & + & 23X^4 & - & X^3 & + & 14X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & & 4X^6 & - & 20X^5 & + & 28X^4 & - & 8X^3 & + & 16X^2 & - & 32X & & & \\
\cline{3-15}
 & & & & X^5 & - & 5X^4 & + & 7X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & - & 8 & \\
 & & & & X^5 & - & 5X^4 & + & 7X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & - & 8 & \\
\cline{5-15}
 & & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2164

1. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}\arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$.

b. En déduire une primitive sur $[0;1]$ de la fonction $\varphi : x \longmapsto \dfrac{x^4}{x^2+1}$.

c. Calculer alors I à l'aide d'une intégration par parties.

2. On pose $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(x)-\cos(x)+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$.

a. i. À l'aide de vos formules de trigonométrie, montrer que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ 1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

ii. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ puis de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

b. Calculer la dérivée de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour tout $x \in]0;\pi[$.

c. Justifier que : $\quad \forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right], \quad \sin(x)-\cos(x) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

d. Calculer alors J à l'aide du changement de variables $u = x + \dfrac{\pi}{4}$ et d'un autre qu'il conviendra de définir.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2164

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} &= \frac{x^2\left(1+x^2\right)}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2\left(1+x^2\right) - \left(1+x^2\right)+1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2+x^4-1-x^2+1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^4}{1+x^2} \end{aligned}$$

b. La fonction φ est clairement continue sur $[0;1]$ (et même sur $\mathbb{R}$), puisque la fonction $x \longmapsto x^4$ l'est et la fonction $x \longmapsto 1+x^2$ l'est aussi et ne s'y annule pas. Par conséquent, elle admet des primitives.
En notant Φ une primitive de φ sur $[0;1]$, par primitivation de chacun des termes constituant φ, il vient : $\forall x \in [0;1], \quad \Phi(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + \arctan(x)$.

c. On procède alors à une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \arctan(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) = \dfrac{x^3}{3} - x + \arctan(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \dfrac{x^4}{x^2+1} \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan(x)\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan(x)\right)\times\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan(x)\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\frac{x^3}{3}-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\arctan(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan(x)\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \left[\frac{1}{2}\left(\arctan(x)\right)^2\right]_0^1\\
&= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan(x)\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3+x-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\left(\arctan(x)\right)^2\right]_0^1\\
&= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan(x)\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\left(\arctan(x)\right)^2\right]_0^1\\
&= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x+\arctan(x)\right)\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\left(\arctan(x)\right)^2\right]_0^1\\
&= \ldots = \frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{6}-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\ln(2)
\end{aligned}$$

2. a. i. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $\cos(x)=\cos\left(2\times\frac{x}{2}\right)$, soit $\cos(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et comme $1=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, il vient bien $1-\cos(x)=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

ii. On en déduit alors que $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ce qui donne $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}$.

Ainsi, puisque $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$, il vient $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}$.

b. La fonction $x\longmapsto\cos(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0;\pi[$, et la fonction $x\longmapsto\sin(x)$ est dérivable sur $]0;\pi[$ et ne s'y annule pas. Par théorème, la fonction $h:x\longmapsto\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est ainsi dérivable sur $]0;\pi[$, et on a :

$$\forall x\in\,]0;\pi[\,,\quad h'(x)=\frac{-\sin(x)\times\sin(x)-\cos(x)\times\sin(x)}{\left(\sin(x)\right)^2}\text{ soit } h'(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)}$$

c. Pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, il vient $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, soit $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(x)-\sin(x)\right)$.

D'où $\sin(x)-\cos(x)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

d. On a donc : $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$ soit $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}\left(1-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)}\,\mathrm{d}x$.

On effectue le changement de variable $u=x+\frac{\pi}{4}$. Il permet d'écrire les relations : $\left\{\begin{array}{l} u=x+\frac{\pi}{4}\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ x=0 \quad\Leftrightarrow\quad u=\frac{\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{4}\quad\Leftrightarrow\quad u=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$,

pour obtenir : $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\left(1-\cos(u)\right)}\,\mathrm{d}u$.

Or $1-\cos(u)=2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$, et par suite, il vient : $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}\,\mathrm{d}u$

On effectue alors le changement de variable $v=\frac{u}{2}$ qui permet d'écrire les relations $\left\{\begin{array}{l} v=\frac{x}{2}\\ \mathrm{d}v=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\\ u=\frac{\pi}{4}\quad\Leftrightarrow\quad v=\frac{\pi}{8}\\ u=\frac{\pi}{2}\quad\Leftrightarrow\quad v=\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$

et d'obtenir : $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}\sin^2(v)}\,\mathrm{d}v$.

On en déduit alors à l'aide de la question **(2)(b).** que : $J = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos(v)}{\sin(v)} \right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi : $J = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} \right)$, c'est à dire $J = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-1 + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}} \right)$.

Or :
$$\begin{aligned} -1 + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}}} &= -1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ &= -1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ &= -1 + \frac{\sqrt{4-2}}{2-\sqrt{2}} \\ &= -1 + \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{-2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\ &= \frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Et ainsi, $J = 1$.