Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2338

1. Former le $DL_3\,(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}\right)$.

2. En utilisant la formule de Taylor-Young, former le $DL_2\,(\sqrt{2})$ de la fonction $g : x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2338

1. Au vosinage de 0, les deux expressions $1+\tan(x)$ et $1-\tan(x)$ sont strictement positives. On peut donc écrire $f(x) = \ln(1+\tan(x)) - \ln(1-\tan(x))$.

On sait que le $DL_3\,(0)$ de $x \longmapsto \tan(x)$ est : $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$.

Ainsi, il vient : $f(x) = \ln\left(1 + x + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right) - \ln\left(1 - \left(x + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\right)$

Par ailleurs, on sait que le $DL_3\,(0)$ de $x \longmapsto \ln(1-x)$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$ sont :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$

En composant les deux développements limités il vient que :

$$f(x) = -\left(x+\frac{x^3}{3}\right) - \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2}{2} - \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3}{3} + \left(x+\frac{x^3}{3}\right) - \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$

expression dans laquelle on ne conservera après développement que les termes de degré inférieurs ou égaux à 3 pour obtenir :

$$f(x) = -2x - \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$$

2. La fonction $g : x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $]1;+\infty[$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]1;+\infty[,\quad g'(x) &= -\frac{1}{x}^2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)}}\right) \\
&= \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^4} \times \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]1;+\infty[,\quad g''(x) &= -\frac{1}{2}\left(4x^3-2x^2\right) \times \left(x^4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \\
&= -\frac{2x^3-x^2}{\left(x^4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Par suite, il vient que $\begin{cases} g\left(\sqrt{2}\right) = \arccos\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} \\ g'\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ g''\left(\sqrt{2}\right) = -\dfrac{4\times 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2\left(4-2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ et donc que $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right) - \dfrac{3}{2}\dfrac{\left(x-\sqrt{2}\right)}{2} + \underset{x\to\sqrt{2}}{o}\left(\left(x-\sqrt{2}\right)\right)$

EX. 2 | Réf. 2190

On considère $P = 2X^9 - 6X^8 - 6X^7 + 26X^6 + 6X^5 - 42X^4 - 2X^3 + 30X^2 - 8$.

1. Trouver trois racines réelles évidentes de P.

2. Déterminer leur ordre de multilplicité.

3. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2190

1. Les nombres -1, 1 et 2 sont racines « évidentes » de P.

2.
- On a : $P'(X) = 18X^8 - 48X^7 - 42X^6 + 156X^5 + 30X^4 - 168X^3 - 6X^2 + 60X$. De plus -1, 1 et 2 sont encore racines de P'.
- On a : $P''(X) = 144X^7 - 336X^6 - 252X^5 + 780X^4 + 120X^3 - 504X^2 - 12X + 60$. Seuls -1 et 1 sont encore racines P''.
- On a : $P'''(X) = 1008X^6 - 2016X^5 - 1260X^4 + 3120X^3 + 360X^2 - 1008X - 12$. Seul -1 est encore racine de P'''.
- On a : $P^{(4)}(X) = 6048X^5 - 10080X^4 - 5040X^3 + 9360X^2 + 720X - 1008$. Aucun de ces trois nombres n'est racine de $P^{(4)}$.

Ainsi, 2 est une racine de multiplicité 2, 1 est une racine de multiplicité 3 et -1 est une racine de multiplicité 4.

3. Ainsi : $P(X) = 2(X-2)^2(X-1)^3(X+1)^4$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2195

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 puis $M^2 + M - 2\mathrm{I}_3$.

2. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

4. On pose $Q = P^{-1}MP$.

a. Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PQ^nP^{-1}$.

b. Calculer Q, Q^2, Q^3 et Q^4.

c. Conjecturer une expression de Q^n où $n \in \mathbb{N}$.
Justifier votre réponse par récurrence.

d. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$ que l'on explicitera.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2195

1. On obtient que $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, et par suite que :

$$M^2 + M - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Puisque $M^2 + M - 2\mathrm{I}_3 = 0$, on peut écrire : $M^2 + M = 2\mathrm{I}_3$.
Par suite : $M(M + \mathrm{I}_3) = 2\mathrm{I}_3$.
Ainsi : $M\left(\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$.

Il existe donc une matrice $N = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3$ qui vérifie $M \times N = \mathrm{I}_3$.

Par conséquent, la matrice M est inversible d'inverse $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3$ qui est donc : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

3. On fait opérer l'algorithme de Gauss sur la matrice augmentée $(P \,|\, \mathrm{I}_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)}_{\substack{\textbf{Les trois pivots sont non nuls,} \\ \textbf{la matrice et inversible}}} \underset{L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

La matrice P est donc inversible d'inverse la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $M^n = PQ^nP^{-1}$ »

Montrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que $M^0 = PQ^0P^{-1}$.

On sait que $M^0 = \mathrm{I}_3$. De plus : $\begin{aligned} PQ^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$

et par conséquent $M^0 = PQ^0P^{-1}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $M^n = PQ^nP^{-1}$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que $M^{n+1} = PQ^{n+1}P^{-1}$.

On sait que $M^{n+1} = M \times M^n$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $M^{n+1} = MPQ^nP^{-1}$.

Or on a : $Q = P^{-1}MP$, donc en multipliant à gauche cette égalité par P, il vient que $PQ = MP$ puisque $P^{-1}P = \mathrm{I}_3$, et en multipliant à droite par P^{-1}, il vient que $PQP^{-1} = M$ puisuqe $PP^{-1} = \mathrm{I}_3$.

Par suite, on a donc $M^{n+1} = P \underbrace{Q \underbrace{P^{-1}P}_{=\mathrm{I}_3} Q^n}_{=Q^{n+1}} P^{-1}$ ce qui donne que $M = PQ^{n+1}P^{-1}$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(\backslash)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

b. On obtient :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad Q^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

c. On peut conjecturer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ »

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n par récurrence sur n.

nitialisation : pour $n = 0$, on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que l'on a bien $Q^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^0 \end{pmatrix}$.

Par convention $Q^0 = \mathrm{I}_3$ et $(-2)^0 = 1$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^0 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$, soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^0 \end{pmatrix} = Q^0$, ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait la propriété la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$, et montrons que, sous cette hypothèe, on a la propriété $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $Q^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$.

Par définition : $Q^{n+1} = Q^n Q$. Or par hypothèse de récurrence, $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Par conséquent : $Q^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et il vient : $Q^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$ qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(0)$ étant vraie, et la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

d. De la relation $PQ^nP^{-1} = M^n$, en effectuant ce dernier produit, il vient ainsi :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n \end{pmatrix}$$