Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4622

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$

1. Déterminer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum w_n x^n$.

3. Montrer que : $\forall x \in \left]-R; R\right[, \ \left(1 - x - x^2\right) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x.$

En déduire alors la fonction somme de la série entière $\sum w_n x^n$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4622

1. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont les solutions de l'équation caractéristique sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \alpha\varphi^n + \beta \times \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Puisque $w_0 = 0$, il vient que $\alpha + \beta = 0$, c'est à dire $\alpha = -\beta$.

Puisque $w_1 = 1$, il vient que $\alpha - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ c'est à dire $-\beta\sqrt{5} = 1$.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

2. Puisque $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ et que $|\varphi| > 1$, on a par comparaison que : $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\varphi^n\right)$.

On en déduit donc que $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$.

D'après le théorème d'équivalence pour les séries entières, on sait alors que les deux séries entières $\sum w_n x^n$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n x^n$ ont le même rayon de convergence. Or $\sum \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n x^n$ est une série entière de type série géométrique. Son rayon de convergence est donc égal à $\dfrac{1}{\varphi}$.

3. Toutes les séries écrites étant convergentes sur :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{1}{\varphi}; \frac{1}{\varphi}\right[,\ \left(1-x-x^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^{n+1} - \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} w_{n-1} x^n - \\ &= \underbrace{w_0}_{=0} + \underbrace{w_1}_{=1} x - \underbrace{w_0}_{=0} x + \sum_{n=2}^{+\infty} \\ &= x\end{aligned}$$

On en déduit alors que : $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{\varphi}; \dfrac{1}{\varphi}\right[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = x.$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1400

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, . . ., deux boules portant le numéro n.
On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre nécesaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i^{e} paire de boules portant le même numéro, à partir d'une $(i-1)^{\text{e}}$ paire de boules.

1. **a.** Quelle relation lie X_n à Y_1, Y_2, . . ., Y_n ?
   b. Déterminer la loi de Y_1.
   Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1;n]\!]$ la loi de Y_i. Quelle est son espérance.
   c. En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = n^2$.
2. **a.** Dans le cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.
   b. On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}([X_3 = k]) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. On revient au cas général.
   a. Montrer que $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.
   b. Exprimer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1400

1. **a.** On a $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   b.
   - Pour Y_1 : du fait que, lorsque l'on tire une paire de boules de numéros différents ces dernières sont remises dans l'urne, tant que l'on n'a pas obtenu une paire de même numéro, l'urne est toujours dans le même état. Ainsi, la variable aléatoire Y_1 correspond au temps d'attente d'apparition de la première paire de boule de même numéro et suivra donc une loi géométrique de paramètre p, ce dernier étant bien constant d'après la remarque faite. La probabilité de tirer une paire de boules portant le même numéro est alors $\dfrac{\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \dfrac{1}{2n-1} = p$ puisqu'il y a $\binom{n}{1}$ façons de choisir le numéro de la paire de boules à extraire et $\binom{2n}{2}$ façon d'extraire une paire de boules de l'urne. Par conséquent $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$.
   - Sur le même principe, dès lors qu'une paire de boule de même numéro a été extraite de l'urne, tant que l'on n'en retire pas une nouvelle, l'urne reste dans le même état. Ainsi, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, Y_i suit une loi géométrique de paramètre $p_i = \dfrac{n-i+1}{\binom{2(n-i+1)}{2}} = \dfrac{1}{2n-2i+1}$ où p_i est la probabilité d'obtenir une nouvelle paire de boules portant le même numéro quand $i-1$ paires de boules portant le même numéro ont été extraites. Ainsi $Y_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2n-2i+1}\right)$.

   On en déduit que $\mathbb{E}(Y_i) = 2n - 2i + 1$.

c. Par linéairité de l'espérance, $E(X_n)\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} 2n-2i+1 = n^2$.

2. a.
- Si $n=1$, X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.
- Si $n=2$, l'urne contient donc deux paires de boules de même numéro. X_2 est égale au temps d'attente de la première paire de boules portant le même numéro, donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (voir explication pour Y_1).

b. Si $n=3$, alors Y_3 est la variable aléatoire certaine égale à 1 et donc $X_3 = Y_1+Y_2+1$.
Soit $k \geq 3$. On considère le système complet d'événements $([Y_1=1])_{i\in\mathbb{N}^*}$ pour écrire que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3=k]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_3=k]\cap[Y_1=k]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2=k-i-1)\,\mathbb{P}(Y_1=i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2=k-i-1)\,\mathbb{P}(Y_1=i)
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2=k-i-1) = \mathbb{P}(Y_2=k-i-1)$ car les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes. En effet, intuitivement, le « temps mis pour extraire la première paire de boules de même numéro » n'a pas d'incidence sur le « temps mis pour extraire la deuxième paire de boules de même numéro ». Par suite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3=k]) &= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-2}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \quad = \quad \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3}\sum_{i=1}^{k-2}\left(\frac{6}{5}\right)^{i-1} \\
&= \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3}\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{k-2}-1}{\frac{1}{5}} \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)
\end{aligned}$$

3. a. $[X_n=n]$ est l'événement « à chaque tirageon obtient une paire de boules portant le même numéro », c'est à dire que, pour tout $i\in[\![1;n]\!]$, $Y_i=1$. Ainsi $[X_n=n] = \bigcap_{i=1}^{n}[Y_i=1]$. En utilisant l'indépendance de ces événements, $\mathbb{P}([X_n=n]) = \prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2n-2i+1} = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

b. L'événement $[X_n=n+1]$ est l'événement « à tous les tirages on obtient une paire de boules portant le même numéro, sauf à un tirage qui n'est pas le dernier tirage ». Donc :

$$[X_n=n+1] = \bigcup_{i=1}^{n-1}\left([Y_i=2]\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[Y_j=1]\right)$$

Par incompatibilité et indépendance des événements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_n=n+1]) &= \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}\left([Y_i=2]\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}[Y_j=1]\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n-1}\left(\mathbb{P}(Y_i=2)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathbb{P}(Y_j=1)\right) \\
&= p_1p_2\dots p_{n-1}\sum_{i=1}^{n}(1-p_i) \quad = \quad \frac{2^n n}{(2n)!}\left(n-1-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2j+1}\right) \\
&= \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right) \quad = \quad \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n-h_{2k}-\frac{1}{2}h_n\right)
\end{aligned}$$