Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5335

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$

1. Justifier que : $\forall x \in \left]-1;1\right],\ \ln(1+x) = S_{n+1}(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$
2. Étudier la convergence des deux suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $x \in \left]-1;1\right[$. Démontrer que $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Montrer et que l'on a :
$$\forall x \in \left]-1;1\right],\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$
5. Si $x \in \left]-\infty;-1\right] \cup \left]1;+\infty\right[$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
6. Justifier les deux formules suivantes :

Formule 1

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Formule 2

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5335

1. Soit $x \in \left]-1;1\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $x \neq -1$, on a $-x \neq 1$ et il vient que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$

Ainsi, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$

Les différentes fonctions mises en jeu dans la relation précédentes étant clairement continues sur $[0;x]$, il vient donc :
$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} (-t)^k\right) \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\right) \mathrm{d}t$$
et par linéarité de l'intégrale que :
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^x (-t)^k\,\mathrm{d}t\right) = \underbrace{\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{=\ln(1+x)} - \int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Or il est clair que : $\displaystyle\int_0^x (-t)^k\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$

On en déduit alors que :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^x (-t)^k\,\mathrm{d}t\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} \\
&\underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j \\
&\underset{(-1)^{j-1}=(-1)^{j+1}}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j \\
&= S_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

et on obtient donc la relation voulue.

2. **Étude de** $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a direment que :
$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{2n+1-(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Étude de $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a direment que :
$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \\ &= \frac{2n+3-(2n+2)}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Étude de la limite de $S_{2n+1} - S_{2n}$ **:** il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$

et comme $\left|\dfrac{(-1)2n+1}{2n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $S_{2n+1} - S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

En conclusion, les deux suites $(S_{2n}(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(1))_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et donc par théorème, sont convergentes et convergent vers la même limite.

3. On commence par remarquer que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est exactement la suite des sommes partielles de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$.

Soit $x \in \left]-1;1\right[$. Étudions la convergence absolue de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$, c'est à dire la convergence de la série $\sum \dfrac{|x|^k}{k}$, dont la convergence est immédiate pour $x = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dfrac{|x|^k}{k}$.

Pour $x \neq 0$, il est clair que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k > 0$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{u_{k+1}}{u_n} &= \frac{k}{k+1}|x| \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{k}}|x| \end{aligned}$$

et par suite, $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$.

Puisque $x \in \left]-1;1\right[$, on a $|x| < 1$ et donc d'après le critère de d'Alembert, il vient que la série $\sum \dfrac{|x|^k}{k}$ est convergente, ce qui assure l'absolue convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$ et donc la convergence de cette dernière, ce qui assure que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4. On sait que : $\forall x \in \left]-1;1\right],\ \ln(1+x) = S_{n+1}(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Soit $x \in [0;1]$. On a clairement que : $\forall t \in [0;x],\ \left|\dfrac{(-t)^{n+1}}{1+t}\right| \leq t^{n+1}$

Donc par croissance de l'intégrale, il vient que : $$\begin{aligned}\left|\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^x \left|\frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\right|\mathrm{d}t\\ &\leq \int_0^x t^{n+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{x^{n+1}}{n+2}\\ &\leq \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

Comme il est clair que $\dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par le théorème d'encadrement que $\displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Dans le cas où $x \in \,]-1;0[$, on effectue le même raisonnement sur l'intervalle $[0;-x]$ après avoir effectué le changement de variable $u=-x$.
Comme $S_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$, on en déduit que :

$$\forall x \in \,]-1;1]\,,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$$

5. Soit $x \in \,]-\infty;-1] \cup \,]1;+\infty[$.

Si $x>0$: alors $\dfrac{x^k}{k} = \dfrac{\mathrm{e}^{k\ln(x)}}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées, et donc le terme général de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$ ne converge pas vers 0 ce qui donne une divergence grossière pour cette série, et par consquent, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Si $x<0$: alors $\dfrac{x^k}{k} = \dfrac{(-1)^k\,|x|}{k}$ et on en revient au cas précédent pour obtenir la divergence de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

6. On sait que : $\quad \forall x \in \,]-1;1]\,,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

Ainsi, pour $x=1$, il vient que : $\quad \ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

De même, pour $x=-\dfrac{1}{2}$, il vient que : $$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \times (-1)^k \times \frac{1}{2^k}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k2^k}\\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}\end{aligned}$$

et comme $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, on obtient bien la formule 2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5334

Dans tout ce qui suit, n désignera un entier naturel non nul.
Toutes les variables aléatoires que l'on considèrera sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On place n boules dans n boîtes numérotées de 1 à n selon le protocole suivant : chaque boule est placée uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte pouvant donc contenir plus boules).
Si U_i désigne le numéro de la boîte contenant la boule numéro i, les variables aléatoires U_i sont ainsi indépendantes et suivent chacune la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans la boîte n° i et $N = \sup(N_1, \ldots, N_n)$, c'est à dire que N désigne donc le plus grand nombre de boules contenues dans une des n boîtes.

1. **a.** Déterminer, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la loi de la variable aléatoire N_i.
   b. Les variables N_1, ..., N_n sont-elles indépendantes ?
2. Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ de réels positifs et de limite $+\infty$ telle que, pour tout entier k non nul :
$$\left(\frac{\mathrm{e}}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k} = \frac{1}{k^3}$$
   Pour tout la suite, on admettra que : $\dfrac{\alpha_n \ln(\ln(n))}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$.
3. Montrer que N admet une espérance et que, pour tout $\alpha \in [1;n]$, on a : $\mathbb{E}(N) \leq n\mathbb{P}([N>\alpha]) + \alpha$.
4. **a.** Établir que, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a : $\mathbb{P}([N=k]) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([N_i=k]) \leq \frac{n}{k!}$
   b. Montrer que pour tout entier non nul k, on a : $\dfrac{1}{k!} \leq \left(\dfrac{\mathrm{e}}{k}\right)^k$.
   c. En déduire que, pour tout $\alpha \in [1;n]$, on a : $\mathbb{P}([N>\alpha]) \leq n^2\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5334

1. **a.** On considère le schéma de Bernoulli suivant :
   Épreuve de Bernoulli : on prend une boule et on la met dans une des boîtes.
   L'événement succès considéré est « la boule est mise dans la boîte N_i »
   La probabilité du succès est égale à $\dfrac{1}{n}$.
   Répétition de l'épreuve de Bernoulli : on répète cette épreuve n fois de manière indépendante et dans des conditions identiques, de sorte que la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors de cette répétition, suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{n}\right)$.
   Or la varialbe aléatoire qui compte le nombre de succès lors de la réalisation de ce schéma de Bernoulli donne exactement le nombre de boules présentes dans la boîte n° i, c'est à dire que N_i, et donc que N_i suit la loi $\mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{n}\right)$.
   b. Il vient directement que : $\mathbb{P}([N_1=n]\cap[N_2=n]) = 0$ car $[N_1=n]\cap[N_2=n] = \varnothing$
   et que $\mathbb{P}([N_1=n]) \times \mathbb{P}([N_2=n]) \neq 0$.
   Ainsi les variables aléatoires N_1, ..., N_n ne sont pas mutuellement indépendantes.
2. On considère la fonction $f : t \longmapsto \left(\dfrac{\mathrm{e}}{t}\right)^t = \mathrm{e}^{\,t-t\ln(t)}$.
   Il est clair que f est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et que l'on a :
$$\begin{aligned}\forall t \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(t) &= \left(1 - 1\times\ln(t) - t\times\frac{1}{t}\right)\times \mathrm{e}^{\,t-t\ln(t)}\\ &= -\ln(t)\underbrace{f(t)}_{>0}\end{aligned}$$
   Ainsi, l'expression $f'(t)$ est du même signe que $-\ln(t)$ sur $]0;+\infty[$, ce qui donne le tableau de variations suivant pour f :

t	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Limite de f en 0 : par croissances comparées on sait que $t\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ ce qui assurera par somme et composition que $\mathrm{e}^{\,t-t\ln(t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\,0} = 1$.

Limite de f en $+\infty$: on a $t - t\ln(t) = t\,(1-\ln(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ par produit, ce qui assure par composition que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\frac{1}{k}^3 \in \,]0;1]$, compte-tenu des variations de f, l'équation $f(x) = \frac{1}{k^3}$ ne peut avoir de solution que sur l'intervalle $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.
Par ailleurs :

- La fonction f est continue sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$;
- La fonction f est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$;
- $\frac{1}{k^3}$ appartient à l'intervalle $]\lim t, +\infty f(t); \mathrm{e}\,] =]0; \mathrm{e}\,]$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = \frac{1}{k^3}$ admet une unique solution sur $]1;+\infty[$, que l'on note α_k.

Par ailleurs, par construction $f(\alpha_k) = \frac{1}{k^3}$ et $f(\alpha_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)^3}$ ce qui assure que $f(\alpha_k) > f(\alpha_{k+1})$ et par stricte décroissance de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$ assure que $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, et donc que la suite $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ est strictement croissante. Si elle était convergente, compte-tenu du théorème de la limite monotone, elle serait nécessairement majorée. Il existerait donc M tel que : $\quad \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \alpha_k \leq M$.
Par décroissance de la fonction f sur $[1;+\infty[$, il viendrait que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \underbrace{f,\alpha_k}_{=\frac{1}{k^3}} \geq f(M)$.

Ce dernier point contredit le fait que $\frac{1}{k^3} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par conséquent on a bien $\alpha_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. On a clairement que $N(\Omega) = [\![1;n]\!]$, donc admet une espérance.
Par définition de $\mathbb{E}(N)$, on a : $\quad \mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([N=k])$

Soit alors $\alpha \in [1;n]$. Il est clair que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{\substack{k=1\\k\leq\alpha}}^{n} k\mathbb{P}([N=k]) + \sum_{\substack{k=1\\k>\alpha}}^{n} k\mathbb{P}([N=k])\\
&\leq \sum_{\substack{k=1\\k\leq\alpha}}^{n} \alpha\mathbb{P}([N=k]) + \sum_{\substack{k=1\\k>\alpha}}^{n} n\mathbb{P}([N=k])\\
&= \alpha\sum_{\substack{k=1\\k\leq\alpha}}^{n} \mathbb{P}([N=k]) + n\sum_{\substack{k=1\\k>\alpha}}^{n} \mathbb{P}([N=k])\\
&\leq \alpha\sum_{\substack{k=1\\k\leq\alpha}}^{n} \mathbb{P}([N=k]) + n\mathbb{P}([N>\alpha])\\
&\leq \alpha\times 1 + n\mathbb{P}([N>\alpha])\\
&= \alpha + n\mathbb{P}([N>\alpha])
\end{aligned}$$

4. a. Il est clair que $[N=k] \subset \bigcup_{i=1}^{n} [N_i = k]$.

Par suite, comme il s'agit d'une union disjointe, il vient que : $\quad \mathbb{P}([N=k]) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([N_i=k])$

Or on sait que :

$$\begin{aligned}
\forall k\in[\![1;n]\!],\ \mathbb{P}([N_i=k]) &= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}\\
&= \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}}_{\leq 1} \times \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}}_{\leq 1} \times \frac{1}{k!}\\
&\leq \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

ce qui assure donc que : $\mathbb{P}([N=k]) \leq n \times \dfrac{1}{k!}$

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si X désigne une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre k, on a nécessairement que $\mathbb{P}([X=k]) \leq 1$, et comme dans ce cas on a $\mathbb{P}([X=k]) = \mathrm{e}^{-k}\dfrac{k^k}{k!} \leq 1$, on en déduit que $\dfrac{1}{k!} \geq \left(\dfrac{k}{\mathrm{e}}\right)^k$ ce qui est la relation demandée par passage à l'inverse.

c. On a direment que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N>\alpha]) &= \sum_{\substack{k=1\\k>\alpha}}^{n} \mathbb{P}([N=k]) \\
&\leq n \sum_{\substack{k=1\\k>\alpha}}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leq n \sum_{\substack{k=1\\k>\alpha}}^{n} \frac{1}{\beta!} \text{ où } \beta \text{ est l'entier immédiatement supérieur à } \alpha \\
&\leq n \times n \times \frac{1}{\beta!} \\
&= \frac{n^2}{\beta!} \\
&\leq n^2 \left(\frac{\mathrm{e}}{\beta}\right)^{\beta} \\
&= n^2 f(\beta) \\
&\leq n^2 f(\alpha) \text{ par décroissance de } f
\end{aligned}$$