À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5255] | 1| Changement de bases pour un endomorphisme

Dans tout cet exercice, on désigne par u et v les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u=(1,1,1)$ et $v=(1,0,1)$.

On considère alors l'application f définie par :

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z)u+(x+2y+z)v\end{array}\right.$$

et on désigne par $\mathcal{B}_3=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_3$.

(3). On considère la famille de vecteurs $\mathcal{C}=(u_1,u_2,u_3)$ donnée par $u_1=(-3,1,-3)$, $u_2=(1,0,1)$ et $u_3=(3,-2,1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{C}$, puis calculer P^{-1}.

(5). On note alors B la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Déterminer B à l'aide de la formule de changement de base pour les endomorphismes.

Éléments de correction

(1). **Image de $\mathbb{R}^3$ par f :** il est immédiat que l'image d'un élément de $\mathbb{R}^3$ par f est un élḿent de $\mathbb{R}^3$.

Image d'une combinaison linéaire par f : soient $\left\{\begin{array}{rcl}\lambda & \in & \mathbb{R}\\ w_1=(x_1,y_1,z_1) & \in & \mathbb{R}^3\\ w_2=(x_2,y_2,z_2) & \in & \mathbb{R}^3\end{array}\right.$, posons $w_3=(x_3,y_3,z_3)$ donné par $w_3=\lambda w_1+w_2$ où par construction on a : $\left\{\begin{array}{rcl}x_3 & = & \lambda x_1+x_2\\ y_3 & = & \lambda y_1+y_2\\ z_3 & = & \lambda z_3+y_3\end{array}\right.$ et montrons que $f(w_3)=\lambda f(w_1)+f(w_2)$.
On a par définition de f que :

$$\begin{array}{rcl}
f(w_3) & = & (x_3+y_3-z_3)\,u+(x_3+2y_3+z_3)\,v\\
& = & (\lambda x_1+x_2+\lambda y_1+y_2+\lambda z_3+y_3)\,u+(\lambda x_1+x_2+2\,(\lambda y_1+y_2)+\lambda z_3+y_3)\,v\\
& = & (\lambda\,(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2))\,u+(\lambda\,(x_1+2y_1+z_1)+(x_2+2y_2+z_2))\,v\\
& = & \lambda\,(x_1+y_1+z_1)\,u+(x_2+y_2+z_2)\,u+\\
& & \quad\lambda\,(x_1+2y_1+z_1)\,v+(x_2+2y_2+z_2)\,v\\
& = & \lambda\,(x_1+y_1+z_1)\,u+\lambda\,(x_1+2y_1+z_1)\,v\\
& & \quad\underbrace{(x_2+y_2+z_2)\,u+(x_2+2y_2+z_2)\,v}_{=f(w_2)}\\
& = & \lambda\underbrace{(x_1+y_1+z_1)\,u+(x_1+2y_1+z_1)\,v}_{=f(w_2)}+f(w_2)\\
& = & \lambda f(w_1)+f(w_2)
\end{array}$$

et donc f est bien linéaire.

Conclusion : f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc par définition un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2). Un calcul direct donne que :
$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & u+v \\ & = & (2,1,2) \\ f(e_2) & = & u+2v \\ & = & (3,1,3) \\ f(e_3) & = & -u+v \\ & = & (0,-1,0) \end{array}$$

et donc par définition, la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(3). En notant $Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{C}$ dans la base canonique, par théorème, cette famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, la matrice Q est inversible, c'est à dire ici de rang égal à 3.

Un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et par suite Q est de rang 3 et donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4). Par définition d'une matrice de passage, on a $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors l'inverse de la matrice P par échelonnement réduit en ligne de la matrice augmentée $(P|\mathrm{I}_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.

On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{6} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

et ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{5}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(5). D'après les formules de changement de bases pour les endomorphismes, on a que : $B = P^{-1}AP$.

Un calcul direct donne alors que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5253] | 2| Application linéaire

On désigne par F_1 et F_2 les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$F_1 = \{(x,y,z,t)\,,\ x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+z-t=0\}\ F_2 = \mathrm{Vect}\left((1,1,1,1)\,,(1,0,0,0)\right)$$

(1). Démontrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une base de F_1 et donner une base de F_2. En préciser leur dimension.

(3). Soit $u \in \mathbb{R}^4$ un vecteur quelconque fixé.
Montrer qu'il existe un unique couple $(f_1, f_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = f_1 + f_2$, et le déterminer en fonction des composantes du vecteur u.

(4). On considère alors l'application f définie par :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ u & \longmapsto & f_1 - f_2 \end{array}\right.$$

où f_1 et f_2 sont les vecteurs définis à la question précédente pour un vecteur u quelconque de $\mathbb{R}^4$.

(a). Montrer que f est une application linéaire.

(b). Déterminer le noyau de f. Qu'en déduire pour f ?

(c). Démontrer alors que $F_1 = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ et que $F_2 = \mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id})$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^4$.

(d). On désigne par $\mathcal{B}$ la famille obtenue par concaténation de la base de F_1 et de la base de F_2 trouvée à la question **(2)**.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(e). Déterminer alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

(5). On désigne alors par $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(a). Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_4$ à la base $\mathcal{B}$.

(b). À l'aide des formules de changement de bases pour les endomorphismes, donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_4$.

Éléments de correction

(1). $F_1 \subset \mathbb{R}^4$ **:** par construction de F_1

Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de $\mathbb{R}^4$ appartient à F_1 : en effet, on a $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0)$ et $0+0+0+0 = 0$ et $0-0+0-0 = 0$.

Stabilité de F_1 par combinaison linéaire : soient $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u_1 = (x_1,y_1,z_1,t_1) & \in & F_1 \\ u_2 = (x_2,y_2,z_2,t_2) & \in & F_2 \end{array}\right.$, on pose $u_3 = \lambda u_1 + u_2$

où si $u_3 = \nu^{x_3,y_3,z_3,t_3}$ on a $\left\{\begin{array}{rcl} x_3 & = & \lambda x_1 + x_2 \\ y_3 & = & \lambda y_1 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda z_1 + z_2 \\ t_3 & = & \lambda t_1 + t_2 \end{array}\right.$.

Montrons que $u_3 \in F_1$.

Un calcul direct donne que :

$$\begin{array}{rcl} x_3+y_3+z_3+t_3 & = & \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2 + \lambda t_1 + t_2 \\ & = & \lambda x_1 + \lambda y_1 + \lambda z_1 + \lambda t_1 + \underbrace{x_2+y_2+z_2+t_2}_{=0 \text{ car } u_2 \in F_1} \\ & = & \lambda\underbrace{(x_1+y_1+z_1+t_1)}_{=0 \text{ car } u_1 \in F} + 0 \\ & = & 0+0 \\ & = & 0 \end{array}$$

et de même : $$\begin{array}{rcl} x_3-y_3+z_3-t_3 & = & \lambda x_1+x_2-(\lambda y_1+y_2)+\lambda z_1+z_2-(\lambda t_1+t_2) \\ & = & \lambda x_1-\lambda y_1+\lambda z_1-\lambda t_1+\underbrace{x_2-y_2+z_2-t_2}_{=0 \text{ car } u_2\in F_1} \\ & = & \lambda\underbrace{(x_1-y_1+z_1-t_1)}_{=0 \text{ car } u_1\in F}+0 \\ & = & 0+0 \\ & = & 0 \end{array}$$

et par suite $u_3 \in F_1$.

Conclusion : F_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Base de F_2 : Par construction F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, dont une famille génératrice est $\mathcal{F}_2 = \{(1,1,1,1),(1,0,0,0)\}$.

Les deux vecteurs de $\mathcal{F}_2$ étant non nuls et non colinéaires, ils forment une famille libre, et par suite, la famille $\mathcal{F}_2$ est une base de F_2.

Base de F_1 : on a tout d'abord que :

$$\begin{array}{rcl} (u=(x,y,z,t)\in F) & \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x+\ \ y+z+\ \ t=0 \\ \quad -2y \quad\ \ -2t=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ \quad\ y \quad\ +t=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & \{x \quad +z \quad =0 y+t=0 \\ & \Leftrightarrow & (u\in \operatorname{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))) \end{array}$$

Ainsi, $F_1 = \operatorname{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$ et sur le même principe que pour F_2, la famille $\mathcal{F}_1 = (1,0,-1,0),(0,1,0,-1)$ est une base de F_1.

Dimension de F_1 et F_2 : la dimension d'un espace étant égal au nombre de vecteurs d'une de ses bases, on en déduit que F_1 et F_2 sont de dimension 2.

(3). Les deux vecteurs f_1 et f_2 cherchés étant combinaisons linéaires des vecteurs des familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ il vient que :

$$\begin{array}{rl} & (\exists!(f_1,f_2)\in F_1\times F_2,\ u=f_1+f_2) \\ \Leftrightarrow & (\exists!(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^4,\ u=\alpha_1(1,0,-1,0)+\alpha_2(0,1,0,-1)+\beta_1(1,1,1,1)+\beta_2(1,0,0,0)) \\ \Leftrightarrow & \left(\text{Le système carré de matrice } A=\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&1&0\\-1&0&1&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix} \text{ admet une unique solution}\right) \\ \Leftrightarrow & (\operatorname{rg}(A)=4) \end{array}$$

Un échelonnement en lignes de la matrice A donne que :

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&1&0\\-1&0&1&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3+1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&2&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$$
$$\underset{L_4\leftarrow L_4+1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&2&0\end{pmatrix} \underset{L_4\leftarrow L_4-1L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

et ainsi que A est bien de rang 4, ce qui assure l'existence et l'unicité du couple (f_1,f_2) demandé.

Par suite en notant $u=(x,y,z,t)$ et en reprenant et poursuivant l'échelonnement précédent, il vient que :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & 1 & x+z \\ 0 & -1 & 1 & 0 & t \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 2 & 0 & t+y \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & 1 & x+z \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -x+y-z+t \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 1L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & y-z+t \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 2 & 0 & y+t \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -x+y-z+t \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 2 & 0 & y+t \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -x+y-z+t \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \leftarrow -1L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x-y+z-t \end{array}\right)$$

et on trouve donc que :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = \alpha_1 \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t = \alpha_2 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}t = \beta_1 \\ x - y + z - t = \beta_2 \end{cases}$$

ce qui permet d'expliciter les vecteurs $f_1 = \alpha_1 (1, 0, -1, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0, -1)$ et $f_2 = \beta_1 (1, 1, 1, 1) + \beta_2 (1, 0, 0, 0)$.

Il vient alors que : $f_1 = \dfrac{1}{2} (y - z + t, y - t, -y - z + t, y - t)$

et que : $f_2 = \dfrac{1}{2} (2x - y + 2z - t, y + t, y + t, y + t)$.

(4).(a). Soient $\begin{cases} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u & \in & \mathbb{R}^4 \\ v & \in & \mathbb{R}^4 \end{cases}$ et on pose $w = \lambda u + v$. Montrons que $f(w) = \lambda f(u) + f(v)$.

D'après ce qui précède il existe trois uniques couples (f_1, f_2), (g_1, g_2) et (h_1, h_2) de $F_1 \times F_2$ tels que $u = f_1 + f_2$, $v = g_1 + g_2$ et $w = h_1 + h_2$.

On doit donc montrer que $h_1 - h_2 = \lambda (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2)$.

Par construction de w, on a donc : $\begin{array}{rcl} w & = & \lambda (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2) \\ & = & \lambda f_1 + g_1 + \lambda f_2 + g_2 \end{array}$

Or F_1 et F_2 étant deux sous-espaces de $\mathbb{R}^4$, on a $\lambda f_1 + g_1 \in F_1$ et $\lambda g_1 + g_2 \in F_2$ et l'unicité établie précédemment, donne que $\begin{cases} h_1 & = & \lambda f_1 + g_1 \\ h_2 & = & \lambda f_2 + g_2 \end{cases}$

Par définition de f, il vient alors que :

$$\begin{array}{rcl} f(w) & = & h_1 - h_2 \\ & = & \lambda f_1 + g_1 - (\lambda f_2 + g_2) \\ & = & \lambda f_1 - \lambda f_2 + \underbrace{g_1 - g_2}_{=f(v)} \\ & = & \lambda \underbrace{(f_1 - f_2)}_{=f(u)} + f(v) \\ & = & \lambda f(u) + f(v) \end{array}$$

et par suite f est bien linéaire.

(b). Soit $u \in \operatorname{Ker}(f)$ et écrivons $u = f_1 + f_2$ avec $(f_1, f_2) \in F_1 \times F_2$.

Puisque $f(u) = \overrightarrow{0}$ par hypothèse, $f_1 - f_2 = \overrightarrow{0}$, c'est à dire $f_1 = f_2$.

Ainsi, f_1 et f_2 sont deux éléments de $F_1 \cap F_2$.

Montrons alors que $F_1 \cap F_2 \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Soit alors $v \in F_1 \cap F_2$. Puisque $v \in F_2$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = \alpha (1, 1, 1, 1) + \beta (1, 0, 0, 0)$ c'est à dire que $v = (\alpha + \beta, \alpha, \alpha, \alpha)$.

Or $v \in F_1$, donc on doit avoir : $\alpha+\beta+\alpha+\alpha+\alpha=0$ et $\beta+\alpha-\alpha+\alpha-\alpha=0$ c'est à dire que $4\alpha+\beta=0$ et $\beta=0$, ce qui assure que $\alpha=0$ et $\beta=0$, donc que $v=\overrightarrow{0}$, et finalement que $F_1 \cap F_2 \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Par suite, le vecteur u est donc nécessairement le vecteur nul puisque $f_1 \in F_1 \cap F_2$.

On en déduit donc que $\mathrm{Ker}\,(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, ce qui assure le caractère injectif de f, et comme f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension finie, par théorème, f est bijectif, et c'est donc un automorphisme.

(c). **Lien F_1 et $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id})$:** par définition, on a : $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) = \left\{u \in \mathbb{R}^4,\ (f-\mathrm{Id})\,(u) = \overrightarrow{0}\right\}$

ou encore que : $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) = \left\{u \in \mathbb{R}^4,\ f(u) = u\right\}$

Il vient donc que : $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) = \left\{u = f_1+f_2 \in \mathbb{R}^4,\ f_1-f_2 = f_1+f_2\right\}$

c'est à dire que : $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) = \left\{u = f_1+f_2 \in \mathbb{R}^4,\ f_2 = 0\right\}$

et finalement que : $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{Id}) = F_1$

Lien F_2 et $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id})$: par définition, on a : $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}) = \left\{u \in \mathbb{R}^4,\ (f+\mathrm{Id})\,(u) = \overrightarrow{0}\right\}$

ou encore que : $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}) = \left\{u \in \mathbb{R}^4,\ f(u) = -u\right\}$

Il vient donc que : $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}) = \left\{u = f_1+f_2 \in \mathbb{R}^4,\ f_1-f_2 = -f_1-f_2\right\}$

c'est à dire que : $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}) = \left\{u = f_1+f_2 \in \mathbb{R}^4,\ f_1 = 0\right\}$

et finalement que : $\mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}) = F_2$

(d). En notant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, par théorème, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, la matrice A est inversible, c'est à dire est de rang 4.

Les calculs menés à la question **(3)** assurent que A est de rang 4 et par suite qu'elle est inversible, et que $\mathcal{B}$ est inversible

(e). Puisque $(1,0,-1,0) \in F_1$, par ce qui précéde $f\,(1,0,-1,0) = (1,0,-1,0)$. De même, on a que $f\,(0,1,0,-1) = (0,1,0,-1)$.

Puisque $(1,1,1,1) \in F_2$, par ce qui précède, on a $f\,(1,1,1,1) = -\,(1,1,1,1)$ et de même on a $f\,(1,0,0,0) = -\,(1,0,0,0)$.

Par suite, la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$ est par construction : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(5).(a). Par définition, la matrice de passage de $\mathcal{B}_4$ à $\mathcal{B}$ est la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rencontrée précédemment.

(b). En notant A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_4$, la formule de changement de base pour les endomorphismes donnent que $B = P^{-1}AP$ et par suite que $A = PBP^{-1}$.

On recherche l'inverse de la matrice P par échelonnement en lignes de la matrice augmentée $(P|\mathrm{I}_4)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 1L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \leftarrow -1L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

et par suite, il vient que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Le calcul PBP^{-1} donne alors que : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.