Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2198

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x} \cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1.

2. À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer I_2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2167

On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

On considère alors la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \end{array} \right.$.

On remarque ainsi, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$, puis en étudier son signe.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-1;+\infty[$.

d. Justifier alors que : $\quad \forall x \in [0;1]\,, \quad 0 \leq f(x) \leq 1$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0;1]$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $\quad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|u_n - 1|$

puis que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.

5. Conclure quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.