Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2197

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = 4X^7 - 16X^6 + 9X^5 + 15X^4 + 15X^3 - 18X^2 - 28X - 8$$

1. Soit Q le polynôme donné par $Q = X^2 + X + 1$.

   a. Effectuer la division euclidienne de P par Q.

   b. Qu'en conclure ?

2. Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.

3. Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2158

Soit f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \end{array} \right.$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en étudier son signe.

   b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Construire alors le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Justifier que, pour tout $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right)$.

   c. Quelle est alors la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Calculer I_0 et I_1.

On pourra pour cette dernière remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{x-1}{x+1} = -1 + \dfrac{2x}{x+1}$,

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 + f'(x) = 1$.

5. Calculer alors $I_{n-2} - I_n$ pour tout $n \geq 2$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

   a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_n = I_0 + I_1 - I_n - I_{n+1}$.

   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.