Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5327

La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-contre.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{4}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Étudier l'indépendance de X et de Y.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}\left((2X+3Y)^2\right)$ en justifiant vos calculs.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5326

Soient b et r deux entiers naturels non nuls.
On considède une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges.
On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard dans cette urne ; après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et l'on y rajoute une deuxième boule de la même couleur que celle qui a été tirée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la n^{e} boule tirée est blanche », c'est à dire que X_n vaut 1 si la n^{e} boule tirée est blanche et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_{n+1}=1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
5. Pour toute la suite de l'exercice, on suppose désormais que $b=1$ et que $r=1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}([S_n=1]) = \dfrac{1}{n+1}$ et calculer $\mathbb{P}([S_n=n+1])$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, on a la relation :

$$\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) = \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k-1]) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k])$$

   En déduire que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1; n+1]\!]$.