Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5236] | 1| Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, on désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.
On désigne par $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_q = (f_1, \dots, f_q)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.

(1). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 3$ et $q = 2$ et on suppose que u est telle que :

$$\begin{cases} u(e_1) &= f_1 + 2f_2 \\ u(e_2) &= 2f_1 - f_2 \\ u(e_3) &= -f_1 + f_2 \end{cases}$$

(a). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par u en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_2$.

(b). Déterminer ensuite la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.

(2). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 3$ et $q = 3$ et donc que $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_q$, et on suppose que u est telle que :

$$\begin{cases} u(e_1) &= 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ u(e_2) &= 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ u(e_3) &= 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

(a). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par u.

(b). Déterminer ensuite la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_3$.

(c). u est-il un automorphisme ?

(3). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 4$ et $q = 4$ et donc que $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_q$, et on suppose que la matrice de u dans $\mathcal{B}_4$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

(a). Expliciter en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_4$, les images des vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$.

(b). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par u.

(c). Déterminer le noyau et l'image de u.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5237] | 2

Dans tout ce qui suit, f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère par ailleurs les vecteurs $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.

(3). Déduire de la question précédente la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.

(4). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminer alors la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

(5). Exprimer M^2 en fonction de M et de I_3.

(6). On rappelle que Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f^n = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si} \quad n = 0 \\ f & \text{si} \quad n = 1 \\ \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}} & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$

Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = (2^n - 1)\, f + (2 - 2^n)\, \mathrm{I}$.