Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2198

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x} \cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1.

2. À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer I_2.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2198

1. Tout est dit dans la question, et il risque d'y avoir un effet cyclique...à exploiter.

2. Même remarque.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2167

On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

On considère alors la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \end{array} \right.$.

On remarque ainsi, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, puis en étudier son signe.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-1;+\infty[$.

d. Justifier alors que : $\quad \forall x \in [0;1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0;1]$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $\quad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,|u_n - 1|$

puis que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.

5. Conclure quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2167

1. **a.** Dériver une fonction de la fonction $\sqrt{u}$, puis étudier le signe d'un quotient.

b. Calculer la limite avec les opérations usuelles.

c. Dresser un tableau de variations complets à l'aide du signe de la dérivée.

d. Exploiter les variations de f pour en déduire l'encadrement demandée.

2. Effectuer le raisonnement par récurrence en identifiant bien au préalable l'assertion à montrer.

3. Majorer sur l'intervalle demandé la dérivée $f'(x)$.

4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis avec f et un intervalle à préciser en remarquant que $u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Exploiter l'encadrement pour obtenir la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.