Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2166

Soit f la fonction définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x}\cos(x)\end{array}\right.$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$ et les écrire toutes les trois à l'aide de vos formules de trigonométrie sous la forme $r^n\mathrm{e}^{x}\cos(x+n\varphi)$ où r et φ sont deux réels à déterminer.
2. Conjecturer alors une formule donnant $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette dernière par récurrence.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2166

1. Se laisse guider par la question.
2. Le plus dur est de trouver la formule...
3. Procéder à un raisonnement par récurrence rigoureux en se souvenant que $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

EX. 2 | Réf. 2198

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t+t\left(\ln(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1.
2. À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer I_2.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2198

1. Tout est dit dans la question, et il risque d'y avoir un effet cyclique...à exploiter.
2. Même remarque.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2338

1. Former le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}\right)$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, former le $DL_2\left(\sqrt{2}\right)$ de la fonction $g : x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2338

1. Utiliser les propriétés du logarithme népérien puis écrire le $DL_3(0)$ de $\tan(x)$, et le reporter, et composer ensuite avec le développement limité de $\ln$.
2. Calculer g' et g'', puis expliciter la formule de Taylor-Young.