Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2197

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = 4X^7 - 16X^6 + 9X^5 + 15X^4 + 15X^3 - 18X^2 - 28X - 8$$

1. Soit Q le polynôme donné par $Q = X^2 + X + 1$.
   - **a.** Effectuer la division euclidienne de P par Q.
   - **b.** Qu'en conclure ?
2. Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.
3. Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2197

1. **a.** Effectuer ce qui est demander... sans se tromper !
   - **b.** Comment interprète-t-on le reste d'une division euclidienne ?
2. Utiliser peut-être le théorème liant dérivée et ordre de multiplicité d'une racine pour aller plus vite.
3. Aller jusqu'au bout de la factorisation en n'oubliant pas de factoriser si possible les éventuels polynômes de degré 2 qui apparaissent.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2158

Soit f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} \end{array} \right.$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(x))^n \,\mathrm{d}x.$

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en étudier son signe.
   - **b.** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   - **c.** Construire alors le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Justifier que, pour tout $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
   - **b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq I_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right)$.
   - **c.** Quelle est alors la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Calculer I_0 et I_1.
   On pourra pour cette dernière remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\quad \dfrac{x-1}{x+1} = -1 + \dfrac{2x}{x+1}$,
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad (f(x))^2 + f'(x) = 1$.
5. Calculer alors $I_{n-2} - I_n$ pour tout $n \geq 2$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1, \quad S_n = I_0 + I_1 - I_n - I_{n+1}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2158

1. **a.** On pensera à essayer de réduire ou mieux le numérateur de $f'(x)$ pour en faciliter l'étude du signe.
   b. On mettra en evidence les termes prépondérants.
   c. On récapitule les résultats précédents dans le tableau de variation.
2. **a.** On exploite le tableau de variation de f.
   b. On utilisera la croissance de l'intégrale pour obtenir le majorant demandé.
   c. Le théorème d'encadrement est direct ici.
3. Pas de difficulté particulière pour I_0 et pour I_1, on se sert de l'indication pour proposer une autre expression pour $f(x)$.
4. Il suffit d'être précautionneux dans la mise au même dénominateur notamment.
5. On commencera par factoriser l'expression de la fonction à intégrer, pour faire ensuite intervenir le résultat de la question précdente et voir apparaître une forme du type $u' \times u^n$.
6. **a.** On utilise le résultat de la question précédente directement dans le calcul de la somme.
   b. Le calcul de la limite est direct.