Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4402

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est } 2\pi-\text{périodique} \\ \forall x \in]-\pi;\pi],\, f(x) = \pi - |x| \end{array}\right.$

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4402

1. On pourra commencer par contruire la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$ pour avoir une idée des éventuels problèmes de continuité de f puis on mettra en forme le développement en série de Fourier de la fonction f.
2. On utilisera alors le théorème de Dirichlet pour conclure quant à la convergence de la série de Fourier de f.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1529

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, pour tout n : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n.$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.
   - **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
     On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   - **b.** Calculer u_0.
   - **c.** En déduire que, pour tout n : $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}.$
4. **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - **b.** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$
     On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   - **c.** Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire un équivalent de $n\,(I_n)^2$ en $+\infty$.
   - **d.** En déduire que la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\forall u \in [-n;+\infty[,\quad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,u}.$
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall t \in [0;\sqrt{n}],\quad \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{\,-t^2}\,\mathrm{d}t.$
   Déduire de la question **(6)** un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
8. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{\,-t^2}\,\mathrm{d}t.$

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1529

1. RAS
2. Remarquer que $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$ et procéder à une intégration par parties.
3. **a.** Multplier les deux membres de l'égalité précédente par I_{n+1}.
   b. RAS
   c. Utiliser la valeur de u_0 pour conclure.
4. **a.** Justifier que la fonction à intégrer dans le calcul $I_{n+1} - I_n$ est positive.
   b. S'assurer que I_n ne s'annule jamais et traduire la croissance d'une suite en terme de comparaison à 1.
   c. RAS
   d. RAS
5. Utiliser l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$.
6. Utiliser l'inégalité précédente.
7. Même remarque
8. Même remarque.