Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1| Réf. 4402

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est } 2\pi-\text{périodique} \\ \forall x \in \left]-\pi;\pi\right], f(x) = \pi - |x| \end{cases}$

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4402

1. On pourra commencer par contruire la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$ pour avoir une idée des éventuels problèmes de continuité de f puis on mettra en forme le développement en série de Fourier de la fonction f.
2. On utilisera alors le théorème de Dirichlet pour conclure quant à la convergence de la série de Fourier de f.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 2| Réf. 1494

Soit H la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. **a.** Montrer que H est bien définie sur $[0;+\infty[$.

   b. Montrer que la fonction H est dérivable sur $[0;+\infty[$, puis montrer que :

   $$\forall x \in [0;+\infty[, \quad H'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$$

   Justifier alors que H et de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;+\infty[$.

   On pourra remarquer que : $\forall x \geq 0, \quad H(x) = H(0) - \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xH(x) = 0$.
3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Montrer que I converge.

   b. Déterminer sa valeur en fonction de $H(0)$.

EX. 2| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1494

1. **a.** Le théorème de comparaison sur $[x;+\infty[$ permet de répondre.

   b. Utiliser la relation de Chasles et le théorème fondamental de l'analyse.
2. Il y a un majoration évidente par e^{-t} de la fonction à intégrer.
3. **a.** On exploite la maojoration précédente pour faire fonctionner le théorème d'encadrement des limites.

   b. RAS