Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4403

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est } 2\pi-\text{périodique} \\ f \text{ est impaire} \\ \forall x \in \,]0;\pi[\,, f(x) = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 \end{cases}$

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4403

1. On pourra commencer par tracer l'allure de la représentation graphique de f afin d'appréhender dans un premier temps les problèmes de continuités ou de parité, puis on calculera ensuite les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. On appliquera le théorème de Dirichlet dans la version qui convient pour obtenir l'égalité entre les deux sommes de séries.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1103

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par I_n l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que : $x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   b. En déduire la convergence de l'intégrale I_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. Calculer I_1, puis en déduire l'expression de I_n pour n impair.
4. En admettant que $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n pour n pair.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1103

1. **a.** On reviendra à la définition de ce qu'est un « petit o ».
   b. On exploitera la relation précédente à l'aide du théorème de majoration pour les intégrales impropres.
2. On effectuera une intégration par parties pour obtenir la relation voulue, mais il faudra gérer correctement les deux bornes qui sont impropres.
3. Le calcul de I_1 ne pose pas de problème puisqu'une primitivation directe est possible.
4. On essaiera d'exprimer I_{2p} en fonction de p et I_0.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 2390

On considère la suite de Polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante définie par :

$$P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \text{ puis par les relations : } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P'_n = P_{n-1} \\ \quad\quad \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad P_n\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P_n\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

1. Déterminer les polynômes P_2 et P_3.
2. Démontrer par récurrence sur l'entier n, que la fonction polynôme P_n est de même parité que n.
   On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : une fonction polynôme est paire si, et seulement si, son écriture polynomiale ne contient que des monômes de degré pair, et une fonction polynôme est impaire si, et seulement si, sont écriture polynomiale ne contient que des monômes de degré impairs.
3. En déduire les valeurs $P_n(t)$ où n est un entier impair supérieur ou égal à trois et $t \in \left\{-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$.
4. Étudier les variations de la fonction P_3 sur $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$, puis tracer sa courbe représentative sur cet intervalle.
5. En déduire les les variations de la fonction P_4 sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.
6. Démontrer que la fonction P_4 s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$, puis donner l'allure de la courbe représentative de P_4 sur cet intervalle (on ne demande pas le calcul des valeurs extrêmes de P_4 sur cet intervalle).
   On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction P_5 sur un intervalle que l'on précisera.
7. Déterminer les variations des fonctions P_5 et P_6 sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.
   puis donner l'allure des courbes représentatives de P_5 et P_6 sur cet intervalle (on ne demande pas le calcul des valeurs extrêmes de ces fonctions sur cet intervalle).
8. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad B_n = n! P_n\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
   - **a.** Calculer B_0,B_1, B_2 et B_3.
   - **b.** Démontrer que : $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; 1], \quad P_n\left(-\frac{1}{2} + t\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k t^{n-k}$$
     On pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.
9. - **a.** En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de B_n en fonction de B_0, B_1, $\ldots$, B_{n-1}.
   - **b.** Calculer alors B_4, B_5 et B_6.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2390

1. On calculera les premiers termes d'une suite de famille de polynômes à partir des relations la définissant. Il faudra être en mesure de primitiver et procéder à des identifications de coefficients...
2. L'indication est donnée dans le sujet...
3. On remarquera dans ce cas que P_n est impaire.
4. Il s'agit d'étudier une fonction polynôme de degré 3.
5. On exploite le lien entre P_3 et P_4 en utilisant l'indication de l'énoncé.
6. On procède de façon similaire.
7. - **a.** Le calcul des B_n demandés est direct.
   - **b.** On utilisera la formule de Taylor pour les polynômes.
8. - **a.** Utiliser la relation précédente pour de bonnes valeurs de t.
   - **b.** C'est une application du résultat précédent.