Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5327

La loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par le tableau ci-contre.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{4}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Étudier l'indépendance de X et de Y.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}\left(\left(2X+3Y\right)^2\right)$ en justifiant vos calculs.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5327

1. Les lois marginales s'obtiennent par sommation des termes en lignes (ou en colonne).
2. Il s'agit de s'assurer que $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}([Y=j])$ pour tout (i,j), ou alors de le mettre en défaut pour un couple (i,j) bien choisi.
3. On applique la définition de l'espérance et le théorème de transfert pour X^2 et Y^2.
4. La linéarité de l'espérance fera apparaître indirecte la covariance du couple (X,Y).

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5326

Soient b et r deux entiers naturels non nuls.
On considède une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges.
On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard dans cette urne ; après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et l'on y rajoute une deuxième boule de la même couleur que celle qui a été tirée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la n^e boule tirée est blanche », c'est à dire que X_n vaut 1 si la n^e boule tirée est blanche et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n^e tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_{n+1}=1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
5. <u>Pour toute la suite de l'exercice</u>, on suppose désormais que $b=1$ et que $r=1$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}([S_n=1]) = \dfrac{1}{n+1}$ et calculer $\mathbb{P}([S_n=n+1])$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![2;n+1]\!]$, on a la relation :
$$\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) = \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k-1]) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k])$$
   En déduire que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1;n+1]\!]$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5326

1. Dès lors que l'on remarque que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, on a presque la réponse à la question.
2. La remarque vaut là encore, mais il faut ici par contre déterminer le paramètre de la loi de X_2, en utilisant le fait que X_1 conditionne X_2 et donc faire intervenir la formule des probabilités totales à partir du système complet d'événements associé à X_1.
3. On effectue un raisonnement similaire au précédent, mais en faisant intervenir la variable aléatoire S_n.
4. On procèdera à un raisonnement par récurrence (forte) où dans l'hérédité on cherchera dans un premier temps à déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ en remarquant que $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$.
5. On remarquera en le justifiant que $[S_n = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0]$ et la formule des probabilités composées permettra de conclure.
6. On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à S_n pour obtenir la relation demandée, et on effectuera là encore une récurrence pour montrer que S_n suit la loi uniforme.