À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [5236] | 1| Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, on désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.
On désigne par $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_q = (f_1, \ldots, f_q)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.

(1). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 3$ et $q = 2$ et on suppose que u est telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(e_1) & = & f_1 + 2f_2 \\ u(e_2) & = & 2f_1 - f_2 \\ u(e_3) & = & -f_1 + f_2 \end{array}\right.$$

(a). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par u en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_2$.

(b). Déterminer ensuite la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.

(2). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 3$ et $q = 3$ et donc que $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_q$, et on suppose que u est telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(e_1) & = & 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ u(e_2) & = & 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ u(e_3) & = & 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{array}\right.$$

(a). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par u.

(b). Déterminer ensuite la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_3$.

(c). u est-il un automorphisme ?

(3). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 4$ et $q = 4$ et donc que $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_q$, et on suppose que la matrice de u dans $\mathcal{B}_4$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

(a). Expliciter en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_4$, les images des vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$.

(b). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par u.

(c). Déterminer le noyau et l'image de u.

Pistes de réflexion

(1).(a). On pourra utiliser la linéarité de u en remarquant que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

(b). On dispose de l'image d'une base exprimée dans une base. . .ce qui est ce dont on a besoin pour construire la matrice d'une application linéaire dans ce jeu de bases.

(2).(a). On pourra utiliser la linéarité de u en remarquant que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

(b). On dispose de l'image d'une base exprimée dans une base. . .ce qui est ce dont on a besoin pour construire la matrice d'une application linéaire dans ce jeu de bases.

(c). On connaît déjà une famille génératrice de l'image, il reste par exemple à rechercher une base du noyau pour mobiliser ensuite le théorème du rang et obtenir une base de l'image.

(d). On fera le lien entre le caractère bijectif et l'inversibilité de sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(3).(a). Comme il s'agit d'obtenir l'image des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ en fonction des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, il suffit de lire le résultat sur la matrice donnée, puisque c'est comme cela qu'elle est construite !

(b). On peut passer par les représentations matricielles des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ pour obtenir l'image d'un vecteur x quelconque de $\mathbb{R}^4$, ou comme dans les questions précédentes, utiliser la linéarité de u.

(c). On dispose d'une famille génératrice de l'image, dont il suffit d'en extraire une base, à l'aide de la dimension du noyau que l'on aura au préalable déterminé puis en mobilisant le théorème du rang.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5237] | 2

Dans tout ce qui suit, f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On considère par ailleurs les vecteurs $u = (0,1,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.

(3). Déduire de la question précédente la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.

(4). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminer alors la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

(5). Exprimer M^2 en fonction de M et de I_3.

(6). On rappelle que Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f^n = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si} \quad n = 0 \\ f & \text{si} \quad n = 1 \\ \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}} & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$

Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = (2^n - 1) f + (2 - 2^n)\,\mathrm{I}$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra faire intervenir la matrice de la famille de vecteurs pour en justifier le caractère base.

(2). On utilisera la représentation matricielle des vecteurs pour faciliter les calculs.

(3). On vient d'obtenir les images des vecteurs d'une base en fonction des vecteurs d'une base, ce qui est ce qu'il est nécessaire d'avoir pour obtenir la représentation matricielle de notre application linéaire dans ce jeu de bases.

(4). On utilisera la caractérisation des automorphismes à l'aide de leur matrice, et on se souviendra que la matrice de f^{-1} est l'inverse de la matrice f.

(5). Il s'agira d'un simple calcul.

(6). On sera attentif à la composition des applications dans l'hérédité de notre récurrence, et le calcul précdent devra être interprété matriciellement.