Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2198

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x} \cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1.

2. À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer I_2.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2198

1. On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{rcl} u(x) = \mathrm{e}^{\,x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{\,x} \\ v(x) = \cos(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = -2\sin(2x) \end{array}$$

où u et v sont donc fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;\pi]$. Il vient ainsi :

$$I_1 = [\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)]_0^{\pi} + 2\underbrace{\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x}_{J_1}$$

Pour calculer J_1, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{rcl} u(x) = \mathrm{e}^{\,x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{\,x} \\ v(x) = \sin(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = 2\cos(2x) \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;\pi]$. Il vient ainsi :

$$J_1 = [\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & [\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)]_0^{\pi} + 2\left([\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)]_0^{\pi} - 2\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ & = & [\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)]_0^{\pi} + 2\,[\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)]_0^{\pi} - 4I_1 \end{array}$$

On obient ainsi la relation : $5I_1 = [\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)]_0^{\pi} + 2\,[\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)]_0^{\pi}$.
Or : $[\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)]_0^{\pi} = 0$ et $[\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)]_0^{\pi} = \mathrm{e}^{\,\pi} - 1$.
Par suite : $I_1 = \dfrac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{\,\pi} - 1\right)$.

2. Le changement de variable $x = \ln(t)$ permet d'écrire les relations : $\left\{\begin{array}{l} x = \ln(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \mathrm{e}^{\,x} \\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ ou encore } \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x \\ \text{si } t = 1\text{, alors } x = 0 \\ \text{si } t = \mathrm{e}\text{, alors } x = \ln(\mathrm{e}) = 1 \end{array}\right.$.

Par suite :

$$\begin{array}{rcl} I_2 & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,x}x^2}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ [\arctan(x)]_0^1 & & \\ & = & \arctan(1) - \arctan(0) \\ & = & \dfrac{\pi}{4} - 0 \\ & = & \dfrac{\pi}{4} \end{array}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2167

On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

On considère alors la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \end{array} \right.$.

On remarque ainsi, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, puis en étudier son signe.
   b. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.
   c. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-1;+\infty[$.
   d. Justifier alors que : $\forall x \in [0;1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 1|$

   puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.
5. Conclure quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2167

1. **a.** La fonction f est définie et continue sur $[-1;+\infty[$, mais n'est dérivable que sur $]-1;+\infty[$.

   Par suite, pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}}$, soit $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}}$ qui donne $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+1}}$.

   Puisque pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, $\sqrt{1+x} > 0$, on en déduit que pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

   b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x}{2} = +\infty$, donc par composition avec la fonction racine carrée, il vient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   c. On a $f(-1) = 0$ et le tableau de variations de f est ainsi :

x	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$
Variations de f	0 ↗	$+\infty$

   d. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;+\infty[$, donc *a fortiori* sur $[0;1]$. Par suite, pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$. Or $f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$ et $f(1) = 1$. Il vient donc pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \in [0;1]$ ».
   Montrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.
   - **Initialisation :** on vérifie que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que l'on a bien $u_0 \in [0;1]$.
     Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_0 = 0$ et ainsi on a bien $u_0 \in [0;1]$. D'où la propriété $\mathcal{P}(0)$.
   - **Hérédité :** on suppose que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir $u_n \in [0;1]$, et montrons alors l'on a la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ à savoir $u_{n+1} \in [0;1]$.
     Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et compte-tenu de la remarque faite, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.
     Or par hypothèse de récurrence, on a $u_n \in [0;1]$. D'après la question **(1)(d).**, on en déduit puisque $u_n \in [0;1]$, que $0 \leq f(u_n) \leq 1$, ce qui permet d'obtenir $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, c'est à dire $u_{n+1} \in [0;1]$, qui est bien la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0;1]$.

3. On a montré précédemment que, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1+x}}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$ et par suite $1 \leq x+1 \leq 2$. Les trois membres de cette inégalité étant clairement positifs, et la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $\quad 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}$. Les trois membres de cette inégalité étant là encore clairement strictement positifs, et la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient : $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$, et en multipliant cette inégalité par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, on obtient : $\quad \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Or $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Par suite, on en déduit que, pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, et comme $0 \leq \dfrac{1}{4}$, on obtient l'inégalité demandée.

4. La fonction f est continue sur l'intervalle $]0;1[$ et y est dérivable et telle que, pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, c'est à dire $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$ et $1 \in [0;1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, il vient : $|f(u_n) - f(1)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 1|$.
Or $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$, d'où : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 1| \quad (\star)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: ´ $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$ ˇ, et nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

- **Initialisation :** on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que l'on a bien $|u_0 - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 |u_0 - 1|$.
Puisque $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 = 1$, on a clairement $|u_0 - 1| \leq 1 \times |u_0 - 1|$, ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$, et montrons que l'on a alors $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0 - 1|$.
D'après l'inégalité $(\star)$ précédemment établie, on sait que $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 1|$. Or par hypothèse de récurrence $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$, donc on en déduit que $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$, soit $|u_{n+1} - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0 - 1|$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.
- **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

5. Puisque $-1 < \dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 1$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n = 0$, et par le théorème d'encadrement $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.