Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2166

Soit f la fonction définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{x}\cos(x) \end{array}\right.$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$ et les écrire toutes les trois à l'aide de vos formules de trigonométrie sous la forme $r^n\mathrm{e}^{x}\cos(x+n\varphi)$ où r et φ sont deux réels à déterminer.
2. Conjecturer alors une formule donnant $f^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette dernière par récurrence.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2166

1. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$ et y est donc ainsi indéfiniement dérivable.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{x}\times\cos(x) - \mathrm{e}^{x}\times\sin(x) \\ &= \mathrm{e}^{x}(\cos(x)-\sin(x)) \\ &= \mathrm{e}^{x}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right) \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$
   et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\sqrt{2}\right)^1\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+1\times\frac{\pi}{4}\right)$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} f''(x) &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\mathrm{e}^{x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{x}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\mathrm{e}^{x}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+2\times\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$
   - Sur le même principe et avec la même factorisation, on montrerait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'''(x) = \left(\sqrt{2}\right)^3\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+3\times\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Les calculs précédents tendent à penser que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{x}\cos\left(n\times\frac{\pi}{4}\right)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{x}\cos\left(n\times\frac{\pi}{4}\right)$ ».

   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.
   - **Initialisation :** vérifions que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, à savoir « $\forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(0)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^0\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+0\times\frac{\pi}{4}\right)$ ».

     Par convention, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f^{(0)}(x)$.

     Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\sqrt{2}\right)^0\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+0\times\frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{e}^{x}\cos(x)$ c'est à dire $f(x)$.

     Par suite, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0.
   - **Hérédité :** supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on ait la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n\mathrm{e}^{x}\cos\left(n\times\frac{\pi}{4}\right)$, et montrons alors que l'on a la propriété $\mathcal{P}(n+1)$, à savoir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{x}\cos\left((n+1)\times\frac{\pi}{4}\right)$.

     Par définition de $f^{(n+1)}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{x} \cos\left(x+n\times\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{x}\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{x}\left(\cos\left(x+n\times\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+n\times\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{x}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x+n\times\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+n\times\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{x}\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$
ce qui est bien le résultat attendu pour avoir $\mathcal{P}(n+1)$.

- **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang $n=0$ et héréditaire, et ainsi, par le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{x}\cos\left(n\times\frac{\pi}{4}\right)$.

EX. 2 | Réf. 2198

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t+t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1.
2. À l'aide du changement de variable $x=\ln(t)$, calculer I_2.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2198

1. On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x)=\mathrm{e}^{x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x)=\mathrm{e}^{x} \\ v(x)=\cos(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x)=-2\sin(2x)\end{array}$$

où u et v sont donc fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;\pi]$. Il vient ainsi :

$$I_1 = \left[\mathrm{e}^{x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\underbrace{\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x}_{J_1}$$

Pour calculer J_1, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x)=\mathrm{e}^{x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x)=\mathrm{e}^{x} \\ v(x)=\sin(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x)=2\cos(2x)\end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;\pi]$. Il vient ainsi :

$$J_1 = \left[\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\mathrm{e}^{x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\left(\left[\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \left[\mathrm{e}^{x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\left[\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - 4I_1\end{aligned}$$

On obient ainsi la relation : $5I_1 = \left[\mathrm{e}^{x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\left[\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$.
Or : $\left[\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\right]_0^{\pi}=0$ et $\left[\mathrm{e}^{x}\cos(2x)\right]_0^{\pi}=\mathrm{e}^{\pi}-1$.
Par suite : $I_1 = \frac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)$.

2. Le changement de variable $x=\ln(t)$ permet d'écrire les relations : $\left\{\begin{array}{l} x=\ln(t) \quad\Leftrightarrow\quad t=\mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ ou encore } \mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\ \text{si } t=1, \text{ alors } x=0 \\ \text{si } t=\mathrm{e}, \text{ alors } x=\ln(\mathrm{e})=1\end{array}\right.$.

Par suite :
$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{e^{x}+e^{x}x^2}e^{x}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ [\arctan(x)]_0^1 & \\ &= \arctan(1)-\arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4}-0 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2338

1. Former le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)}\right)$.

2. En utilisant la formule de Taylor-Young, former le $DL_2(\sqrt{2})$ de la fonction $g : x \longmapsto \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2338

1. Au vosinage de 0, les deux expressions $1+\tan(x)$ et $1-\tan(x)$ sont strictement positives. On peut donc écrire $f(x) = \ln(1+\tan(x)) - \ln(1-\tan(x))$.

On sait que le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \tan(x)$ est : $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

Ainsi, il vient : $f(x) = \ln\left(1+x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) - \ln\left(1-\left(x+\frac{x^3}{3}+\underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\right)$

Par ailleurs, on sait que le $DL_3(0)$ de $x \longmapsto \ln(1-x)$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$ sont :
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
En composant les deux développements limités il vient que :
$$f(x) = -\left(x+\frac{x^3}{3}\right) - \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2}{2} - \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3}{3} + \left(x+\frac{x^3}{3}\right) - \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
expression dans laquelle on ne conservera après développement que les termes de degré inférieurs ou égaux à 3 pour obtenir :
$$f(x) = -2x - \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

2. La fonction $g : x \longmapsto \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $]1;+\infty[$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1;+\infty[,\quad g'(x) &= -\frac{1}{x}^2 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)}}\right) \\ &= \frac{1}{x^2}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^4}\times\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]1;+\infty[,\quad g''(x) &= -\frac{1}{2}\left(4x^3-2x^2\right)\times\left(x^4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1} \\ &= -\frac{2x^3-x^2}{\left(x^4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Par suite, il vient que $\left\{ \begin{array}{l} g\left(\sqrt{2}\right) = \arccos\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} \\ g'\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{4-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ g''\left(\sqrt{2}\right) = -\dfrac{4 \times 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2\left(4-2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$ et donc que $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right) - \dfrac{3}{2}\dfrac{\left(x-\sqrt{2}\right)}{2} + \underset{x\to\sqrt{2}}{o}\left(\left(x-\sqrt{2}\right)\right)$