Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2197

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = 4X^7 - 16X^6 + 9X^5 + 15X^4 + 15X^3 - 18X^2 - 28X - 8$$

1. Soit Q le polynôme donné par $Q = X^2 + X + 1$.

a. Effectuer la division euclidienne de P par Q.

b. Qu'en conclure ?

2. Vérifier que 2 est racine de P, puis en déterminer son ordre de multiplicité.

3. Terminer la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2197

1. a. On pose la division de P par Q pour obtenir : $P = \left(X^2 + X + 1\right)\left(4X^5 - 2X0^4 + 25X^3 + 10X^2 - 20X - 8\right) + 0$

b. Le polynôme P est donc divisible par le polynôme Q, et en terme de factorisaton, cela se traduit par $P = Q \times P_1$ où $P_1 \in \mathbb{R}_5[X]$.

2. • En notant $\tilde{P}$ la fonction polynomiale associée à P, il vient :

$$\tilde{P}(2) = 4 \times 2^7 - 16 \times 2^6 + 9 \times 2^5 + 15 \times 2^4 + 15 \times 2^3 - 18 \times 2^2 - 28 \times 2 - 8 = \ldots = 0$$

Par suite 2 est bien racine de P.

• On s'intéresse auX dérivées successives P', P", etc. de P, et on va vérifier si 2 est racine ou non de ces derniers.
On a : $P' = 28X^6 - 96X^5 + 45X^4 + 60X^3 + 45X^2 - 36X - 28$ et on montre que $\tilde{P}'(2) = 0$.
De même : $P'' = 168X^5 - 480X^4 + 180X^3 + 180X^2 + 90X - 36$ et on montre que $\tilde{P''}(2) = 0$.
Par contre : $P''' = 840X^4 - 1920X^3 + 540X^2 + 360X + 90$ et on montre que $\tilde{P'''}(2) \neq 0$.
Par conséquent 2 est racine de P avec pour ordre de multiplicité 3.

3. On déduit des questions précédentes que P peut s'écrire sous la forme $P = \left(X^2 + X + 1\right)(X - 1)^3 \times P_2(X)$ où P_2 est un polynôme de degré 2.
Par ailleurs, le polynôme $X^2 + X + 1$ étant de degré 2 à discriminant strictement négatif, ce dernier est irréductible dans $\mathbb{R}$.
Division alors P par le polynôme $\left(X^2 + X + 1\right)(X - 1)^3 = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ pour obtenir P_2.
On en déduit donc que : $P = \left(X^2 + X + 1\right)(X - 2)^2\left(4X^2 + 4X + 1\right)$.
Or le polynôme $4X^2 + 4X + 1$ est un polynôme de degré 2 à discriminant nul et de racine double $-\dfrac{1}{2}$. Il est donc factorisable dans $\mathbb{R}[X]$ par : $4X^2 + 4X + 1 = 4\left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

Finalement : $P = 4\left(X^2 + X + 1\right)(X - 2)^2\left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|l}
4X^7 & - & 16X^6 & + & 9X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & X^2+X+1 \\ \cline{16-16}
 & & & & & & & & & & & & & & & 4X^5-2X0^4+25X^3+10X^2-20X-8 \\
4X^7 & + & 4X^6 & + & 4X^5 & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-15}
 & - & 20X^6 & + & 5X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & - & 20X^6 & - & 20X^5 & - & 20X^4 & & & & & & & & & \\ \cline{2-15}
 & & & & 25X^5 & + & 35X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & & & & 25X^5 & + & 25X^4 & + & 25X^3 & & & & & & & \\ \cline{5-15}
 & & & & & & 10X^4 & - & 10X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & & -8 & \\
 & & & & & & 10X^4 & + & 10X^3 & & +10X^2 & & & & & \\ \cline{7-15}
 & & & & & & & - & 20X^3 & - & 28X^2 & - & 28X & & -8 & \\
 & & & & & & & - & 20X^3 & - & 20X^2 & - & 20X & & & \\ \cline{8-15}
 & & & & & & & & & - & 8X^2 & - & 8X & - & 8 & \\
 & & & & & & & & & - & 8X^2 & - & 8X & - & 8 & \\ \cline{10-15}
 & & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr|l}
4X^7 & - & 16X^6 & + & 9X^5 & + & 15X^4 & + & 15X^3 & - & 18X^2 & - & 28X & - & 8 & X^5-5X^4+7X^3-2X^2+4X-8 \\ \cline{16-16}
4X^7 & - & 20X^6 & + & 28X^5 & - & 8X^4 & + & 16X^3 & - & 32X^2 & & & & & 4X^2+4X+1 \\ \cline{1-15}
 & & 4X^6 & - & 19X^5 & + & 23X^4 & - & X^3 & + & 14X^2 & - & 28X & - & 8 & \\
 & & 4X^6 & - & 20X^5 & + & 28X^4 & - & 8X^3 & + & 16X^2 & - & 32X & & & \\ \cline{3-15}
 & & & & X^5 & - & 5X^4 & + & 7X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & - & 8 & \\
 & & & & X^5 & - & 5X^4 & + & 7X^3 & - & 2X^2 & + & 4X & - & 8 & \\ \cline{5-15}
 & & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2158

Soit f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \end{array} \right.$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(x))^n \,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en étudier son signe.
   b. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   c. Construire alors le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Justifier que, pour tout $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq I_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right)$.
   c. Quelle est alors la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Calculer I_0 et I_1.
   On pourra pour cette dernière remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\quad \dfrac{x-1}{x+1} = -1 + \dfrac{2x}{x+1}$,
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad (f(x))^2 + f'(x) = 1$.
5. Calculer alors $I_{n-2} - I_n$ pour tout $n \geq 2$.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.
   a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad S_n = I_0 + I_1 - I_n - I_{n+1}$.
   b. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2158

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right) - \left(\mathrm{e}^{2x}-1\right) \times 2\mathrm{e}\,2x}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} = \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$$
   On a clairement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{e}^{2x} > 0$ et $\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2 > 0$, donc par quotient, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   b.
   - Puisque $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, il vient par quotient que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.
   - En écrivant $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$, il vient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

   c. Le tableau de variation de f est ainsi le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f	-1 $\nearrow$	1

2. **a.** La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur l'intervalle $\left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$.
   Par suite, pour tout $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad f(0) \leq f(x) \leq f\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right)$.

Or on a : $$\begin{aligned} e^{2\times\ln\left(\sqrt{3}\right)} &= e^{2\times\frac{1}{2}\ln(3)} . \\ &= e^{\ln(3)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Ainsi, $f\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$, d'où l'encadrement souhaité.

b. On a : $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

Ainsi, en élevant à la puissance n cette inégalité et tout étant positif, il vient : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0; ()\sqrt{3},\right], 0 \leq (f(x))^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} 0 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} (f(x))^n \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} 0 \,\mathrm{d}x = 0$ et $$\begin{aligned} \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \mathrm{d}x . \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée.

c. Puisque $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, on a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par le théorème d'encadrement des limites, il vient $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. • Par définition : $$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} (f(x))^0 \,\mathrm{d}x . \\ &= \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \ln\left(\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

• Par définition : $$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{(\ln)\sqrt{3},} (f(x))^1 \,\mathrm{d}x . \\ &= \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \left(-1 + \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \left(-1 + \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) \mathrm{d}x &= \left[-x + \ln\left(1 + e^{2x}\right)\right]_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \\ &= \left(-\ln\left(\sqrt{3}\right) + \ln\left(1 + e^{2\times\ln\left(\sqrt{3}\right)}\right)\right) - \left(-0 + \ln\left(1 + e^{2\times 0}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\quad (f(x))^2 = \dfrac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

Ainsi : $$\begin{aligned} (f(x))^2 + f'(x) &= \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{\left(e^{2x}+1\right)^2} + \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} . \\ &= \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{\left(e^{2x}+1\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

5. Soit $n \geq 2$. On a :

$$\begin{aligned} I_{n-2} - I_n &= \int_0^{\ln(\sqrt{3})} \left((f(x))^{n-2} - (f(x))^n\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(x))^{n-2} \left(1 - (f(x))^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln(\sqrt{3})} f'(x) \times (f(x))^{n-2} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{n-1}(f(x))^{n-1}\right]_0^{\ln(\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} \end{aligned}$$

6. a. De la question précédente, il vient $I_{k-1} - I_{k+1} = \dfrac{1}{k2^k}$

On a directement :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} I_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} I_{k+1} \end{aligned}$$

En effectuant dans chaque somme un changement d'indice, il viendra : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} I_k - \sum_{k=2}^{n+1} I_k$, ce qui amènera $S_n = I_0 + I_1 - I_n - I_{n+1}$.

b. Par suite, puisque $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il viendra simplement $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I_0 + I_1 = \ln(2)$.