Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4402

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est } 2\pi-\text{périodique} \\ \forall x \in \left]-\pi;\pi\right], f(x) = \pi - |x| \end{cases}$

1. Déterminer la série de Fourier de f.

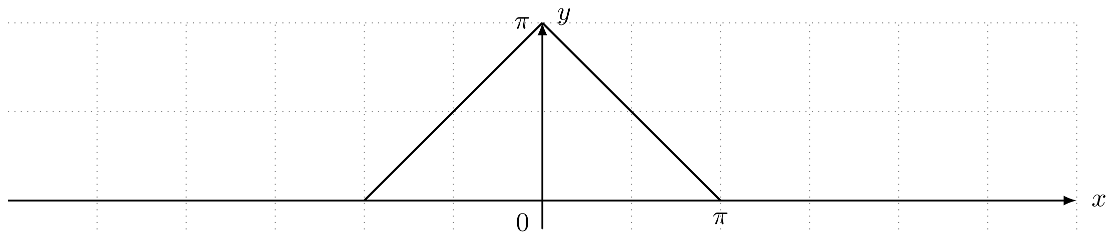
2. La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4402

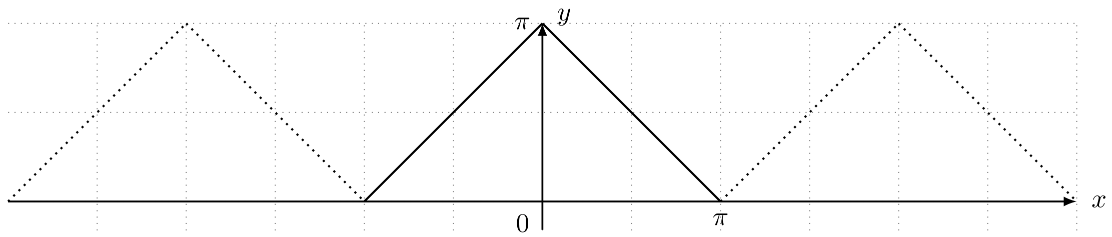
1. On peut commencer par remarquer que la restriction de la fonction f à l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right[$ est paire.
En effet, son domaine de définition $\left]-\pi;\pi\right[$ est clairement symétrique par rapport à 0 et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\pi;\pi\right[,\ f(-x) &= \pi - |-x| \\ &= \pi - |x| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Tracé de f sur une période, par exemple $[-\pi;\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$: on commence par tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0;\pi]$, puis comme la restriction de f est paire à cet intervalle, on complète ce tracé sur $[-\pi;0]$ par symétrie du précédent tracé par rapport à l'axe des ordonnées. On a ainsi le tracé de f sur $[-\pi;\pi]$.



Comme $[-\pi;\pi]$ est un intervalle de longueur 2π égal à la période de f, on complète le tracé de f sur $[-\pi;\pi]$ en effectuant des translations de vecteurs $2\pi k\overrightarrow{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$, du tracé de f sur $[-\pi;\pi]$:



Calcul des coefficients de Fourier de f : f étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodique, ses coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par :

$$\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ \mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

Calcul de $a_0(f)$: la restriction de la fonction f à l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right[$ étant paire, il vient que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi, il vient : $$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - |t|)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

et donc : $$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi t - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \left(\pi\times 0 - \frac{0^2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Calcul de $a_n(f)$: la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\pi;\pi[$ étant paire et la fonction $t \longmapsto \cos(nt)$ étant paire, par opérations sur les fonctions paires et impaires, pour tout entier n, la restriction de la fonction $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ à $]-\pi;\pi[$ est paire, et ainsi : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$

Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$. On a donc : $$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi-|t|)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi-t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} u(t) = \pi - t &\quad \underset{\text{se dérive en}}{\leadsto} \quad u'(t) = -1 \\ v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt) &\quad \underset{\text{se dérive en}}{\leadsto} \quad v'(t) = \cos(nt) \end{aligned}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, il vient :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi-t)\times\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\times\frac{1}{n}\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi-t)\times\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[[\pi-\pi]\times\frac{1}{n}\sin(n\pi) - (\pi-0)\times\frac{1}{n}\sin(n\times 0)\right) - \left(\frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\cos(n\times 0)\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{2\,(1-\cos(n\pi))}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Comme on a : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

il vient alors : $a_n(f) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n^2}\ \text{si} n \text{impair} \\ 0 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

et par suite : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2} \end{cases}$

Calcul de $b_n(f)$: la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\pi;\pi[$ étant paire et la fonction $t\longmapsto\sin(nt)$ étant impaire, par opérations sur les fonctions paires et impaires, pour tout entier n, la restriction de la fonction $t\longmapsto f(t)\sin(nt)$ est impaire à $]-\pi;\pi[$, et ainsi : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$;

Série de Fourier de f : la série de Fourier de f est donc $\displaystyle\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)$

2. La fonction f est $2\pi-$périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge vers $f(t)$.
Ainsi, ici il vient que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t)$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1529

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, pour tout n : $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n.$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.
   a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   b. Calculer u_0.
   c. En déduire que, pour tout n : $\quad (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}.$
4. **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   b. En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$
   On pourra utiliser le résultat de la question (2).
   c. Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire un équivalent de $n\,(I_n)^2$ en $+\infty$.
   d. En déduire que la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\quad \forall u \in [-n;+\infty[, \quad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,u}.$
6. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;\sqrt{n}], \quad \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{\,-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{\,-t^2}\,\mathrm{d}t.$
   Déduire de la question **(6)** un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.
8. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{\,-t^2}\,\mathrm{d}t.$

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1529

1. On a directement que :
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.\,\mathrm{d}t \\ &= [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
et que :
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Intégrons par parties I_{n+2} en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(t)=\cos^{n+1}(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t)=-(n+1)\sin(t)\cos^n t \\ v(t)=\sin(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t)=\cos(t) \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ pour obtenir :

$$\begin{array}{rcl} I_{n+2} & = & \left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^n t\,\mathrm{d}t \\ & = & (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & (n+1)\int_0\frac{\pi}{2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t-(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & (n+1)I_n-(n+1)I_{n+2} \end{array}$$

d'où $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$ et finalement $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

3. a. On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n$

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-u_n & = & (n+2)I_{n+2}I_{n+1}-(n+1)I_{n+1}I_n \\ & = & (n+2)\times\dfrac{n+1}{n+2}I_n\times I_{n+1}-(n+1)I_{n+1}I_n \\ & = & (n+1)I_nI_{n+1}-(n+1)I_{n+1}I_n \\ & = & 0 \end{array}$$

et par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

b. On a $u_0=(0+1)\times I_1\times I_0$ et donc d'après ce qui précèdre, on en déduit que $u_0=\dfrac{\pi}{2}$.

c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant constante, elle est égale à son premier terme et donc : $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)I_{n+1}I_n=\dfrac{\pi}{2}$.

4. a. On sait que : $\forall 0\le t\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le\cos(t)\le 1$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N},\ \cos^{n+1}t\le\cos^n(t)$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$

Les fonctions étant continues sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, par croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_{n+1}\le I_n$

Ainsisuite $(I_n)_{n\ge 0}$ est décroissante.

b. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}\le I_{n+1}$ d'où $(n+2)I_{n+2}\le(n+2)I_{n+1}$ qui donne $(n+1)I_n\le(n+2)I_{n+1}$ qui donnera $\dfrac{n+1}{n+2}\le\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\le 1$.

c. Puisque $\dfrac{n+1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\sim}1$, on en déduit que $\dfrac{n+1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et d'après le théorème d'encadrement on en déduit que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

Ainsi $I_{n+1}\underset{n\to+\infty}{\sim}I_n$. Comme $(n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}n$, on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\pi}{2} & = & (n+1)I_{n+1}I_n \\ & \underset{n\to+\infty}{\sim} & n\times I_n\times I_n \end{array}$$

c'est à dire que $n\left(I_n\right)^2\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi}{2}$.

d. On en déduit donc que $n\left(I_n\right)^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{\pi}{2}$ et par composition avec la fonction $x\longmapsto\sqrt{x}$, on en déduit que $\sqrt{n}I_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

5. Pour tout réel $x>-1$, $\ln(1+x)\le x$.

Donc pour tout entier n et tout réel $u\ge -n$, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\forall u\in[-n;+\infty[,\ \ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right)\le\dfrac{u}{n}$

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N},\forall u\in[-n;+\infty[,\ n\ln\left(1+\dfrac{u}{n}\right)\le u$

et par suite : $\forall n\in\mathbb{N},\forall u\in[-n;+\infty[,\ \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n\le\mathrm{e}^{\,n}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0; \sqrt{n}]$, on peut appliquer l'inégalité précédente au réel $u = -t^2$: $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2}$ ainsi qu'au réel $u = t^2$: $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{t^2}$.

D'où l'on déduit en passant à l'inverse : $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$, ce qui donne au final : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions qui interviennent étant continues sur le segment $[0; \sqrt{n}]$, par croissance de l'intégrale on obtient :

$$K_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq L_n \text{ où } K_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \text{ et } L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}t.$$

Dans K_n, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\sin(u)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et qui amène :

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n+1} u\,\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n} I_{2n+1} \end{aligned}.$$

Dans L_n, on effectue le changement de variable $t = \sqrt{n}\tan(u)$ est bien de classe C^1 et qui amènera :

$$\begin{aligned} L_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u \\ &\underset{\substack{\left[0;\frac{\pi}{4}\right] \subset \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \\ \forall t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leq \cos^{2n-2}(t)}}{\leq} \sqrt{n} I_{2n-2} \end{aligned}$$

En définitive, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.

8. On sait que I_{2n+1} et I_{2n-2} sont équivalents à $\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

Ainsi $\sqrt{n} I_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\sqrt{n} I_{2n-2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.