Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4402

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est } 2\pi\text{−périodique} \\ \forall x \in \left]-\pi;\pi\right], f(x) = \pi - |x| \end{cases}$

1. Déterminer la série de Fourier de f.

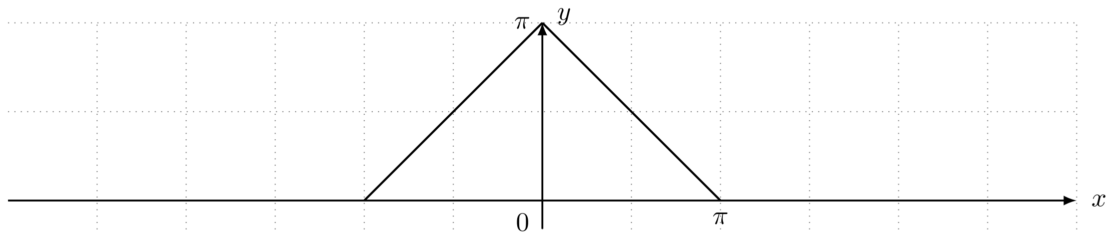
2. La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4402

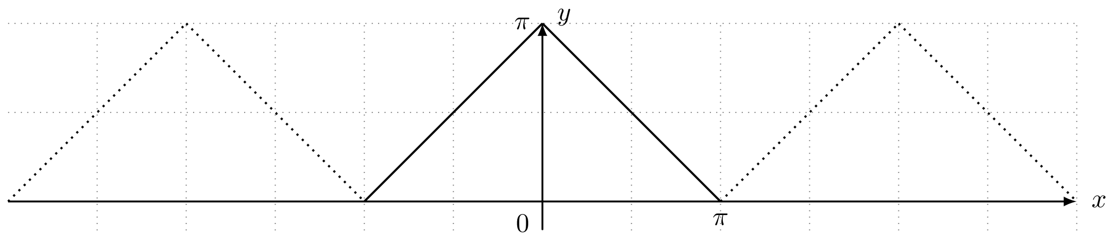
1. On peut commencer par remarquer que la restriction de la fonction f à l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right[$ est paire.
En effet, son domaine de définition $\left]-\pi;\pi\right[$ est clairement symétrique par rapport à 0 et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \left]-\pi;\pi\right[,\ f(-x) &= \pi - |-x| \\ &= \pi - |x| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Tracé de f sur une période, par exemple $[-\pi;\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$: on commence par tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0;\pi]$, puis comme la restriction de f est paire à cet intervalle, on complète ce tracé sur $[-\pi;0]$ par symétrie du précédent tracé par rapport à l'axe des ordonnées. On a ainsi le tracé de f sur $[-\pi;\pi]$.



Comme $[-\pi;\pi]$ est un intervalle de longueur 2π égal à la période de f, on complète le tracé de f sur $[-\pi;\pi]$ en effectuant des translations de vecteurs $2\pi k\overrightarrow{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$, du tracé de f sur $[-\pi;\pi]$:



Calcul des coefficients de Fourier de f : f étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π−périodique, ses coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par : $\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \end{cases}$

Calcul de $a_0(f)$: la restriction de la fonction f à l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right[$ étant paire, il vient que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Ainsi, il vient : $$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi-|t|)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

et donc : $$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi-t)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi t-\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}-\left(\pi\times 0-\frac{0^2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Calcul de $a_n(f)$: la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\pi;\pi[$ étant paire et la fonction $t \longmapsto \cos(nt)$ étant paire, par opérations sur les fonctions paires et impaires, pour tout entier n, la restriction de la fonction $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ à $]-\pi;\pi[$ est paire, et ainsi : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$

Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$. On a donc : $$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi-|t|)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi-t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= \pi - t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad u'(t) = -1 \\ v(t) &= \frac{1}{n}\sin(nt) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad v'(t) = \cos(nt) \end{aligned}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, il vient :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi-t)\times\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-1)\times\frac{1}{n}\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[(\pi-t)\times\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[[\pi-\pi]\times\frac{1}{n}\sin(n\pi)-(\pi-0)\times\frac{1}{n}\sin(n\times 0)\right) - \left(\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}\cos(n\times 0)\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)+\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{2\,(1-\cos(n\pi))}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Comme on a : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

il vient alors : $a_n(f) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n^2} \text{ si} n \text{impair} \\ 0 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$

et par suite : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2} \end{cases}$

Calcul de $b_n(f)$: la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\pi;\pi[$ étant paire et la fonction $t \longmapsto \sin(nt)$ étant impaire, par opérations sur les fonctions paires et impaires, pour tout entier n, la restriction de la fonction $t \longmapsto f(t)\sin(nt)$ est impaire à $]-\pi;\pi[$, et ainsi : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$;

Série de Fourier de f : la série de Fourier de f est donc $\displaystyle\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)$

2. La fonction f est $2\pi-$périodique continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge vers $f(t)$.
Ainsi, ici il vient que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t)$

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1494

Soit H la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. **a.** Montrer que H est bien définie sur $[0; +\infty[$.
   b. Montrer que la fonction H est dérivable sur $[0; +\infty[$, puis montrer que :

$$\forall x \in [0; +\infty[\,, \quad H'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$$

   Justifier alors que H et de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0; +\infty[$.
   On pourra remarquer que : $\forall x \geq 0, \quad H(x) = H(0) - \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} xH(x) = 0$.
3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)\,\mathrm{d}x$.
   a. Montrer que I converge.
   b. Déterminer sa valeur en fonction de $H(0)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1494

1. **a.** Soit $x \geq 0$ fixé. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}$ est continue (et positive) sur $[x; +\infty[$. Il est immédiat que : $\forall t \in [x; +\infty[$, $0 \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t} \leq e^{-t}$. Par suite, puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ aussi, et par suite $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ aussi, ce qui fait que H est bien définie sur $[0; +\infty[$.
   b. La relation de Chasles permet d'écrire que : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$, les deux intégrales impropres étant convergentes. On en déduit la relation : $H(x) = H(0) - \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \geq 0$.
   On note alors F la primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}$ qui s'annule en 0. Alors on a : $\forall x \geq 0, \quad H(x) = H(0) - F(x)$.
   H est alors dérivable sur $[0; +\infty[$, et on a : $\forall x \geq 0, \quad H'(x) = -F'(x) = -f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$, et par suite H est de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0; +\infty[$ puisque H' y est continue.
2. On montre que : $\forall x \geq 0, \forall t \in [0; +\infty[\,, \quad 0 \leq H(x) \leq \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}$, et par suite que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq xH(x) \leq x\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$. D'où le résultat.
3. **a.** La fonction H est continue sur $[0; +\infty[$, et puisque pour tout $x \geq 0$, $0 \leq H(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ qui converge, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xH(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

b. Soit $A \geq 0$. On procède à l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = H(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = H'(x) \\ v(x) = 1 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = x + 1 \end{array} \quad \text{qui donne} \int_0^A H(x)\,\mathrm{d}x = [(1+x)H(x)]_0^1 + \int_0^A \mathrm{e}^{-x}$$

En passant à la limite, on montre que $\lim\limits_{A \to +\infty} (A+1)H(A) = 0$ en remarquant que $(x+1)H(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} xH(x)$ et par suite que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H()\,\mathrm{d}x = 1 - H(0)$.