Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Je m'entraîne à rédiger

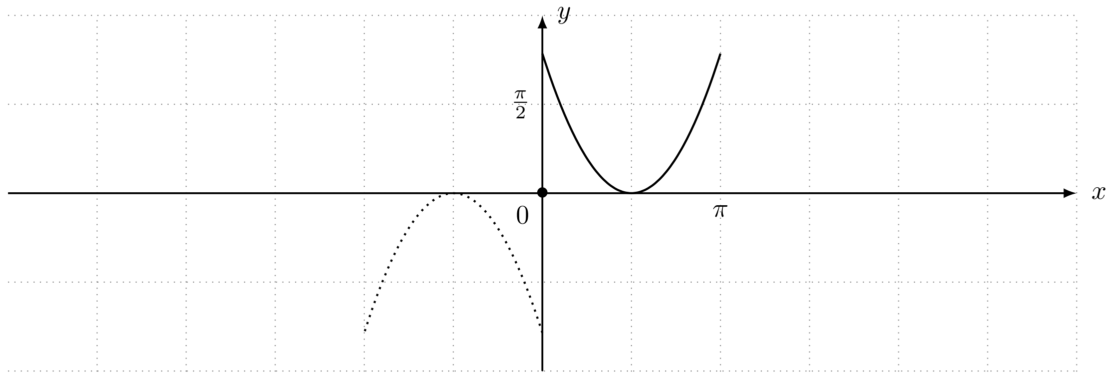
EX. 1 | Réf. 4403

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est } 2\pi-\text{périodique} \\ f \text{ est impaire} \\ \forall x \in]0;\pi[\,, f(x) = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 \end{cases}$

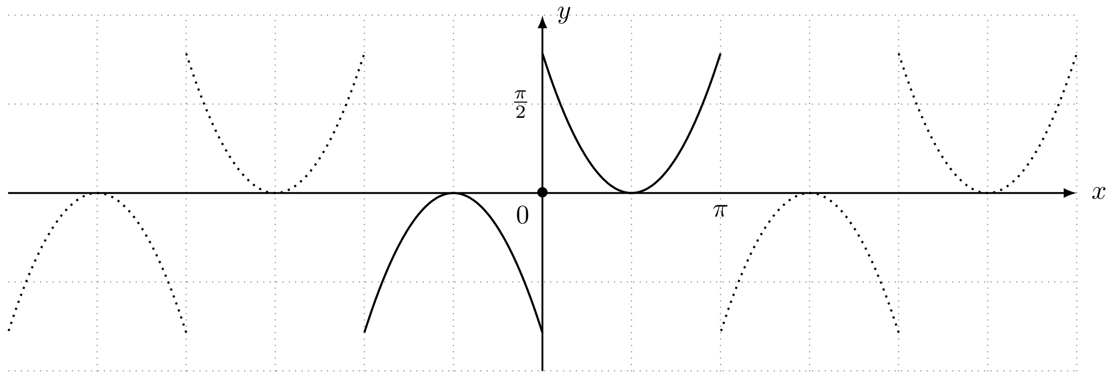
1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4403

1. **Tracé de f sur une période, par exemple $[-\pi;\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$:** on commence par tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0;\pi]$, puis comme f est impaire, on complète ce tracé sur $[-\pi;0]$ par symétrie du précédent tracé par rapport à l'origine du repère. On a ainsi le tracé de f sur $[-\pi;\pi]$.



Comme $[-\pi;\pi]$ est un intervalle de longueur 2π égal à la période de f, on complète le tracé de f sur $[-\pi;\pi]$ en effectuant des translations de vecteurs $2\pi k \overrightarrow{i}$ où $k \in \mathbb{Z}$, du tracé de f sur $[-\pi;\pi]$:



Calcul des coefficients de Fourier : f étant de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodique, ses coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par : $\begin{cases} a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \end{cases}$

Calcul de $a_0(f)$ **:** la fonction f étant impaire, il vient que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

On en déduit donc que $a_0(f) = 0$

Calcul de $a_n(f)$ **:** la fonction f étant impaire et la fonction $t \longmapsto \cos(nt)$ étant paire, par opérations sur les fonctions paires et impaires, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto f(t)\cos(nt)$ est paire, et ainsi : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$

Par conséquent, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = 0.$

Calcul de $b_n(f)$ **:** la fonction f étant impaire et la fonction $t \longmapsto \sin(nt)$ étant impaire, par opérations sur les fonctions paires et impaires, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto f(t)\sin(nt)$ est impaire, et ainsi : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\sin(n\pi)\,\mathrm{d}t.$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nt)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad u'(t) = 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ v(t) &= -\frac{1}{n}\cos(nt) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad v'(t) = \sin(nt) \end{aligned}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, il vient :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt) \times \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left(-\frac{1}{n}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}\underbrace{\cos(0)}_{=1}\left(0 - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) + \int_0^{\pi} \frac{2}{n}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4n} - \frac{\pi^2 \times (-1)^n}{4n} + \int_0^{\pi} \frac{2}{n}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

En effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= t - \frac{\pi}{2} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad u'(t) = 1 \\ v(t) &= \frac{2}{n^2}\sin(nt) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & \quad v'(t) = \frac{2}{n}\cos(nt) \end{aligned}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, il vient :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4n}\left(1 - (-1)^n\right) + \left[\frac{2}{n^2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin(nt)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2}{n^2}\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4n}\left(1 - (-1)^n\right) + \left(\frac{2}{n^2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \frac{2}{n^2}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right) - \left[-\frac{2}{n^3}\cos(nt)\right]_0^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4n}\left(1 - (-1)^n\right) - \left(-\frac{2}{n^3}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3}\cos(0)\right)\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4n}\left(1 - (-1)^n\right) + \frac{2}{n^3} \times (-1)^n - \frac{2}{n^3}\right) \\ &= \frac{\pi}{2n}\left(1 - (-1)^n\right) + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{2}{n^3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} b_{2p}(f) = 0 \\ b_{2p+1}(f) = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\pi^2}{4(2p+1)} - \dfrac{2}{(2p+1)^3}\right) \end{cases}$

Série de Fourier de f : la série de Fourier de f en $t \in \mathbb{R}$ est donc $\sum \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4(2p+1)} - \frac{2}{(2p+1)^3}\right)\sin((2p+1)t)$

2. La fonction f est $2\pi-$périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge pour tout réel t, et en notant $\tilde{f}$ sa régularisée sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4(2p+1)} - \frac{2}{(2p+1)^3}\right)\sin((2p+1)t)$$

En particulier pour $t = \frac{\pi}{2}$, la série numérique $\sum \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4(2p+1)} - \frac{2}{(2p+1)^3}\right)\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)$ converge et on a :

$$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4(2p+1)} - \frac{2}{(2p+1)^3}\right)\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction f étant continue en $\frac{\pi}{2}$, il vient que $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Or $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

De plus comme : $\quad \forall p \in \mathbb{N}, \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$

Il vient : $\quad 0 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4 \times (-1)^p}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4(2p+1)} - \frac{2}{(2p+1)^3}\right)$.

On en déduit donc que : $\quad \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8 \times (-1)^p}{\pi(2p+1)^3} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\pi \times (-1)^p}{2p+1}$

Ce qui donne finalement : $\quad \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^2}{8}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1103

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par I_n l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que : $\quad x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

b. En déduire la convergence de l'intégrale I_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

3. Calculer I_1, puis en déduire l'expression de I_n pour n impair.

4. En admettant que $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n pour n pair.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1103

1. a. D'après les croissances comparées, on sait que : $\quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad t^\alpha \mathrm{e}^{-\beta t} \underset{t \to +\infty}{=} o(1)$

On en déduit donc que : $\quad \forall \alpha > 0, \quad \left(\sqrt{t}\right)^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \underset{t \to +\infty}{=} o(1)$.

Par suite par composition des limites, il vient que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \underset{t \to +\infty}{=} o(1)$

On en déduit alors que : $\quad x^n \mathrm{e}^{-x^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

b. La fonction $f_n : t \longmapsto x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $]-\infty; +\infty[$. Par suite l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en ses deux bornes.

Étude de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$: Tout d'abord, la fonction f_n est clairement positive sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Puisque $t^n \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, il existe un réel $A > 0$ tel que : $\quad \forall t \geq A, \quad 0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{1}{t^2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc d'après le théorème de comparaison des intégrales impropres pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Étude de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$: le changement de variable $u = -t$ est strictement décroissant et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;-1]$ à valeurs dans $[1;+\infty[$.

Ainsi, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ étant une intégrale définie, et les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ étant convergentes, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. En effectuant l'intégration par parties suivantes :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ v(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = x^n \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A;B]$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_A^B x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_A^B - \int_A^B \frac{1}{n+1}x^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\frac{B^{n+1}}{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}}}_{\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow}0} - \underbrace{\frac{A^{n+1}}{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0} + \frac{1}{n+1}\int_A^B x^{n+2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Quitte à considérer alors les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}t$, on en déduit par passage à la limite la relation $I_n = \dfrac{1}{n+1}I_{n+2}$.

3. Un calcul direct donne que : $\quad \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned} \int_A^B x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x &= \left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right] \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} \end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que : $\displaystyle\int_0^B x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{B^2}{2}} - 1 \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} -1$

De même, il vient : $\displaystyle\int_A^0 x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} 1$

Ainsi, on en déduit que $I_1 = \displaystyle\lim_{A\to-\infty}\int_A^0 x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + \lim_{B\to+\infty}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0.$

Par conséquent : $\quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = 0.$

4. Des questions précédentes, on a que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n.$

Ainsi : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+2} = (2p+1)I_{2p}$

Il vient alors : $\forall p \in \mathbb{N},$

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= (2p+1)\times(2p-1)\times\times(2p-3)\times\ldots\times 3\times 1\times I_0 \\ &= \frac{(2p+1)\times 2p\times(2p-1)\times(2p-2)\times\ldots\times 3\times 2\times 1}{2p\times(2p-2)\times\ldots\times 2} I_0 \\ &= \frac{(2p+1)!}{2\times p\times 2(p-1)\times 2(p-2)\times\ldots\times 2\times 1} I_0 \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^p p!} I_0 \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^p p!}\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 2390

On considère la suite de Polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivante définie par :

$$P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \text{ puis par les relations : } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_n' = P_{n-1} \\ \quad\text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad P_n\left(-\frac{1}{2}\right) = P_n\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

1. Déterminer les polynômes P_2 et P_3.

2. Démontrer par récurrence sur l'entier n, que la fonction polynôme P_n est de même parité que n.
On pourra admettre et utiliser le résultat suivant : une fonction polynôme est paire si, et seulement si, son écriture polynomiale ne contient que des monômes de degré pair, et une fonction polynôme est impaire si, et seulement si, sont écriture polynomiale ne contient que des monômes de degré impairs.

3. En déduire les valeurs $P_n(t)$ où n est un entier impair supérieur ou égal à trois et $t \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

4. Étudier les variations de la fonction P_3 sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, puis tracer sa courbe représentative sur cet intervalle.

5. En déduire les les variations de la fonction P_4 sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

6. Démontrer que la fonction P_4 s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, puis donner l'allure de la courbe représentative de P_4 sur cet intervalle (on ne demande pas le calcul des valeurs extrêmes de P_4 sur cet intervalle).
On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction P_5 sur un intervalle que l'on précisera.

7. Déterminer les variations des fonctions P_5 et P_6 sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
puis donner l'allure des courbes représentatives de P_5 et P_6 sur cet intervalle (on ne demande pas le calcul des valeurs extrêmes de ces fonctions sur cet intervalle).

8. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad B_n = n! P_n\left(-\frac{1}{2}\right)$.

a. Calculer B_0,B_1, B_2 et B_3.

b. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;1], \quad P_n\left(-\frac{1}{2}+t\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k t^{n-k}$$
On pourra utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

9. a. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de B_n en fonction de B_0, B_1, …, B_{n-1}.

b. Calculer alors B_4, B_5 et B_6.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2390

1. On a $P_2' = X$ d'où $P_2 = \frac{X^2}{2} + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
Or $P_3' = \frac{X^2}{2} + c$ d'où $P_3 = \frac{X^3}{6} + cX + d$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or $P_3\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P_3\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc $-\dfrac{1}{48} - \dfrac{c}{2} + d = \dfrac{1}{48} + \dfrac{c}{2} + d$.

Ainsi, $c = -\dfrac{1}{24}$. Par suite comme $P_4' = \dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X}{24} + d$ il vient que $P_4 = \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^2}{48} + dX + e$ où $e \in \mathbb{R}$.

Comme $P_4\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$, il vient que $d = 0$.

Par conséquent, $P_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{1}{24}$ et $P_3 = \dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X}{24}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: ´ Le polynôme P_n est une fonction paire si n est pair, et impaire si n est impair ».

Initialisation : pour $n = 0$, n est pair et on a $P_0 = 1$ donc est une fonction clairement paire.
De même pour $n = 1$, n est impair et on a $P_1 = X$ qui est une fonction clairement impaire.
Ainsi $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a $\mathcal{P}(n)$ et montrons sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

- Si n est pair, alors $n+1$ est impair. Par hypothèse de récurrence P_n est une fonction paire. Or $P_{n+1}' = P_n$, donc P_{n+1}' est une fonction paire. Cette dernière ne s'écrit alors qu'avec des monômes de degré pairs. En primitivant, il vient alors que P_{n+1} ne contient que des monômes de degrés impairs plus un terme constant c qui est un monôme de degré 0.
  En primitivant alors P_{n+1}, il vient que P_{n+2} s'écrit à l'aide d'une somme de monômes de degrés pairs, plus un terme en cX et un terme constant d.
  Or $P_{n+2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P_{n+2}\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc $-\dfrac{c}{2} + d = \dfrac{c}{2} + d$, et ainsi, P_{n+1} ne contient que des monômes de degrés impairs et P_{n+1} est une fonction impaire.
- Si n est impair, alors $n+1$ est pair. Par hypothèse de récurrence P_n est une fonction impaire. Or $P_{n+1}' = P_n$, donc P_{n+1}' est une fonction impaire. Cette dernière ne s'écrit alors qu'avec des monômes de degré impairs. En primitivant, il vient alors que P_{n+1} ne contient que des monômes de degrés pairs plus un terme constant qui est en fait un monôme de degré 0 donc pair.
  Ainsi P_{n+1} est une fonction paire.

On a donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : l'assertion $\mathcal{P}(n)$ étant vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$, et héréditaire, par le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

3. Puisque l'on suppose que n est impair supérieur ou égal à 3, la fonction P_n est donc impaire et ainsi on a à la fois $P_n\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ par hypothèse et $P_n\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -P_n\left(\dfrac{2}{2}\right)$ par imparité. Ainsi $P_n\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.
De plus P_n étant impaire, $P_n(0) = 0$.

4. La fonction P_3 étant impaire, il suffit donc de l'étudier sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = \dfrac{1}{24}\left(4x^3 - x\right)$, il vient $P_3'(x) = \dfrac{1}{24}\left(12x^2 - 1\right)$ pour tout $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ qui est ainsi un polynôme de degré 2 qui s'annule sur cet intervalle en $\sqrt{\dfrac{1}{12}}$. Il vient alors le tableau de variations de P_3 :

x	0		$\sqrt{\frac{1}{12}}$		$\frac{1}{2}$
Signe de $P_3'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de P_3	0	$\searrow$	$P_3\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right) > 0$	$\nearrow$	0

On en déduit la représentation graphique de P_3 sur cet intervalle.

5. La fonction P_4 étant paire et sa dérivée est P_3. D'après le tableau de variation de la fonction P_3 obtenu à la question précédente, il vient directement le tableau de variations de P_4 sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

x	0		$\frac{1}{2}$
Signe de $P_4'(x)$		$-$	
Variations de P_3	$P_4(0)$	$\searrow$	$P_4\left(\frac{1}{2}\right)$

et on en déduit alors les variations sur $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ par symétrie :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$
Signe de $P_4'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de P_4	$P_4\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	$P_4(0)$	$\searrow$	$P_4\left(\frac{1}{2}\right)$

6. On sait que $P_5\left(\dfrac{1}{2}\right) = P_5\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Puisque P_5 est continue sur $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ tel que $P_5'(c) = 0$. Or $P_5' = P_4$, d'où l'existence d'au moins un $c \in \left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$ tel que $P_4(c) = 0$.

La fonction P_4 étant paire, on a alors aussi $-c$ qui est solution de l'équation $P_4(x) = 0$.

La stricte croissance de P_4 sur chacun des intervalles $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ et $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, l'équation $P_4(x) = 0$ ne peut posséder que ces deux solutions.

7. • La fonction P_5 est impaire puisque 5 est impair et $P_5' = P_4$.
En notant α la solution de $P_4(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, il vient le tableau de variations de P_5 suivant sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$:

x	0		α		$\frac{1}{2}$
Signe de $P_5(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de P_5	0	$\nearrow$	$P_5(\alpha)$	$\searrow$	0

• Sur le même principe, la fonction P_6 es tpaire de dérivée P_5' qui est positive sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.
On en déduit donc que :

x	0		$\frac{1}{2}$
Signe de $P_6'(x)$		$+$	
Variations de P_6	$P_6(0)$	$\nearrow$	$P_6\left(\frac{1}{2}\right)$

8. **a.** Un calcul direct donne que $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$ et $B_3 = 0$.

b. On applique la formule de Taylor au polynôme P_n pour obtenir : $$P_n\left(-\frac{1}{2}+t\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}\left(-\frac{1}{2}\right)}{k!} t^k$$

Or $P_n^{(k)} = P_{n-k}$ et donc $P_n^{(k)}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{B_{n-k}}{(n-k)!}$

On a donc $P_n\left(-\frac{1}{2}+t\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{n-k}}{k!(n-k)!} t^k$ et ainsi $P_n\left(-\frac{1}{2}+t\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_{n-k} t^k$ et quitte à réindexer la somme :
$$P_n\left(-\frac{1}{2}+t\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k t^{n-k}.$$

9. **a.** L'égalité précédente donnera que :
- Pour $t = 0$: $P_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{B_n}{n!}$
- Pour $t = 1$: $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k$

Or si $n \geq 2$ on a $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = P_n\left(-\frac{1}{2}\right)$, d'où : $$\forall n \geq 2,\quad B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} B_k.$$

Pour $n \geq 1$, en écrivant cette relation au rang $n+1$, on obtient : $\forall n \geq 1,\quad B_{n+1} = B_{n+1} + (n+1)B_n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} B_k$

et ainsi : $$\forall n \geq 1,\quad B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} B_k.$$

b. On obtient alors $B_4 = -\frac{1}{5}\left(B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_2\right) = -\frac{1}{30}$ puis $B_5 = 0$ car $P_5\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et $B_6 = -\frac{1}{7}\left(B_0 + 7B_1 + 21B_2 + 35B_3 + 35B_4 + 21B_5\right) = \frac{1}{42}$