Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5327

La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-contre.

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Étudier l'indépendance de X et de Y.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}\left(\left(2X+3Y\right)^2\right)$ en justifiant vos calculs.

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{4}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5327

1. Le tableau de loi conjointe donne clairement que $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
En utilisant le système complet d'événements $[Y = 0]$, $[Y = 1]$, $[Y = 2]$, la loi de X est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=0]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0]) + \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1]) + \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=2]) \\ &= \frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\frac{1}{24} \\ &= \frac{4}{24}\end{aligned}$$

et sur le même principe, on trouve que : $\begin{cases}\mathbb{P}([X=1]) = \dfrac{16}{24} \\ \mathbb{P}([X=2]) = \dfrac{4}{24}\end{cases}$

De même, il vient que : $\begin{cases}\mathbb{P}([Y=0]) = \dfrac{6}{24} \\ \mathbb{P}([Y=1]) = \dfrac{12}{24} \\ \mathbb{P}([Y=2]) = \dfrac{6}{24}\end{cases}$

On en déduit les lois de X et de Y :

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}([X = x_i])$	$\frac{4}{24}$	$\frac{16}{24}$	$\frac{4}{24}$

y_j	0	1	2
$\mathbb{P}([Y = y_j])$	$\frac{6}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{6}{24}$

2. Par définition, X et Y sont indépendantes si, et seulement si pour tout $(i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$, $\mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j]) = \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
On a clairement ici :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=0])\times\mathbb{P}([Y=0]) &= \frac{4}{24}\times\frac{6}{24} = \frac{1}{24} = \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=0])\times\mathbb{P}([Y=1]) &= \frac{4}{24}\times\frac{12}{24} = \frac{2}{24} = \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=0])\times\mathbb{P}([Y=2]) &= \frac{4}{24}\times\frac{6}{24} = \frac{1}{24} = \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=2])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=0]) &= \frac{16}{24}\times\frac{6}{24} = \frac{4}{24} = \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) &= \frac{16}{24}\times\frac{12}{24} = \frac{8}{24} = \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=2]) &= \frac{16}{24}\times\frac{6}{24} = \frac{4}{24} = \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=2])\times\mathbb{P}([Y=0]) &= \frac{4}{24}\times\frac{6}{24} \\ &= \frac{1}{24} \\ &= \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=0])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=2])\times\mathbb{P}([Y=1]) &= \frac{4}{24}\times\frac{12}{24} \\ &= \frac{2}{24} \\ &= \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=2])\times\mathbb{P}([Y=2]) &= \frac{4}{24}\times\frac{6}{24} \\ &= \frac{1}{24} \\ &= \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2])\end{aligned}$$

et par suite X et Y sont indépendantes.

3. Un calcul direct donne que :

x_i	0	1	2	Total
$\mathbb{P}([X=x_i])$	$\frac{4}{24}$	$\frac{16}{24}$	$\frac{4}{24}$	1
$x_i\mathbb{P}([X=x_i])$	0	$\frac{16}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\mathbb{E}(X)=1$
$x_i^2\mathbb{P}([X=x_i])$	0	$\frac{16}{24}$	$\frac{16}{24}$	$\mathbb{E}(X^2)=\frac{4}{3}$

y_j	0	1	2	Total
$\mathbb{P}([Y=y_j])$	$\frac{6}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{6}{24}$	1
$y_j\mathbb{P}([Y=y_j])$	0	$\frac{12}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\mathbb{E}(Y)=1$
$y_j^2\mathbb{P}([Y=y_j])$	0	$\frac{12}{24}$	$\frac{24}{24}$	$\mathbb{E}(Y^2)=\frac{3}{2}$

4. Il est clair que : $(2X+3Y)^2 = 4X^2+12XY+9Y^2$.
Par suite, la linéarité de l'expérance donne que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left((2X+3Y)^2\right) &= 4\mathbb{E}(X^2)+12\mathbb{E}(XY)+9\mathbb{E}(Y^2) \\ &\underset{\substack{X \text{ et } Y\\ \text{indép.}}}{=} 4\mathbb{E}(X)^2+12\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)+9\mathbb{E}(Y^2) \\ &= 4\times\frac{4}{3}+12\times 1\times 1+9\times\frac{3}{2} \\ &= \frac{185}{6}\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5326

Soient b et r deux entiers naturels non nuls.
On considède une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges.
On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard dans cette urne ; après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et l'on y rajoute une deuxième boule de la même couleur que celle qui a été tirée.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire indicatrice de l'événement « la n^{e} boule tirée est blanche », c'est à dire que X_n vaut 1 si la n^{e} boule tirée est blanche et 0 sinon.
On note S_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_{n+1}=1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.
5. Pour toute la suite de l'exercice, on suppose désormais que $b=1$ et que $r=1$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}([S_n=1]) = \dfrac{1}{n+1}$ et calculer $\mathbb{P}([S_n=n+1])$.
6. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $k\in[\![2;n+1]\!]$, on a la relation :

$$\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) = \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k-1]) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k])$$

En déduire que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1;n+1]\!]$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5326

1. Il est clair que $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et donc X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \dfrac{b}{b+r}$.
2. Sur le même principe X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}([X_2 = 1])$. Les événements $[X_1 = 0]$ et $[X_1 = 1]$ formant un système complet d'événements non nuls, d'après la formule des probabilités totales, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_2 = 1]) &= \mathbb{P}([X_1 = 0])\,\mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = 1])\,\mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) \\ &= \frac{r}{b+rb} \times \frac{b}{b+r+1} + \frac{b}{b+r} \times \frac{b+1}{b+r+1} \\ &= \frac{b}{b+r}\end{aligned}$$

3. Il est clair que $S_n(\Omega) = [\![b; b+n]\!]$. Les événements $[S_n = b]$, …, $[S_n = b+n]$ formant un système complet d'événements non nuls, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \sum_{k=b}^{b+n} \mathbb{P}([S_n = k])\,\mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) \\ &= \frac{1}{r+b+n} \sum_{k=b}^{b+n} k\mathbb{P}([S_n = k]) \\ &= \frac{\mathbb{E}(S_n)}{r+b+n}\end{aligned}$$

4. Il est clair que $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ et donc que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}([X_n = 1])$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{b}{b+r}$ ».

   Montrons par récurrence forte sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Initilisation : On a vu que $\mathbb{P}([X_2 = 1])\ \dfrac{b}{b+r}$, c'est à dire que $\mathbb{P}([X_{1+1}]) = \dfrac{b}{b+r}$ et par suite $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$,…, $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

   On commence par remarquer que $S_n = b + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, et donc par linéarité de l'espérance puisque $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{P}([X_k = 1])$ par hypothèse de récurrence, que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= b + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) \\ &= b + n \times \frac{b}{b+r} \\ &= \frac{b(b+r+n)}{b+r}\end{aligned}$$

   Or on sait que $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{r+b+n}$, dont il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \frac{b(b+r+n)}{b+r} \times \frac{1}{r+b+n} \\ &= \frac{b}{b+r}\end{aligned}$$

   ce qui assure que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

   Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(1)$ étant vraie, et héréditaire, par le principe de récurrence forte, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

5. On commence par remarquer que $[S_n = 1] = \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right]$ puisque qu'au départ il n'y a qu'une seule boule blanche, et qu'il ne faut donc en rajouter aucune lors des tirages à venir.

   Or puisque $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$, il vient que $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = 0\right] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0]$.

Par suite, la formule des probabilités composées donne que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_n=1]) &= \mathbb{P}([X_1=0])\times\mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2=0])\times\ldots\times\mathbb{P}_{[X_1=0]\cap[X_2=0]}([X_3=0])\times\mathbb{P}_{[X_1=0]\cap\ldots\cap[X_{n-1}=0]}([X_n=0])\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\frac{n}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Par ailleurs, le rôle des deux couleurs de boules étant symétriques, il vient immédiatement que $\mathbb{P}([S_n=n+1]) = \dfrac{1}{n+1}$.

6. Les événements $[S_n=1]$, $\ldots$, $[S_n=n+1]$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, la formule des probabilités totales donne que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) &= \sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}([S_{n+1}=k]\cap[S_n=i])\\ &\underset{S_{n+1}=S_n+X_{n+1}}{=} \mathbb{P}([S_{n+1}=k]\cap[S_n=k-1])+\mathbb{P}([S_{n+1}=k]\cap[S_n=k])\\ &= \mathbb{P}([S_n=k-1])\times\mathbb{P}_{[S_n=k-1]}([X_{n+1}=1])+\mathbb{P}([S_n=k])\times\mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1}=0])\\ &= \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k-1])+\frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k])\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« S_n suit la loi uniforme sur $[\![1;n+1]\!]$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

Initilisation : on a vu que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ce qui revient à dire que X_1 suit la loi uniforme sur $[\![0;1]\!]$.

Puisque $S_1 = 1+X_1$, il est alors immédiat que S_1 suit la loi uniforme sur $[\![1;2]\!]$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

On sait déjà que $\mathbb{P}([S_{n+1}=1]) = \dfrac{1}{n+2}$ et que $\mathbb{P}([S_{n+1}=n+2]) = \dfrac{1}{n+2}$.

Pour alors $k\in[\![2;n+1]\!]$, il vient d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([S_{n+1}=k]) &= \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k-1])+\frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}([S_n=k])\\ &\underset{\text{H.R.}}{=} \frac{k-1}{n+2}\times\frac{1}{n+1}+\frac{n+2-k}{n+2}\times\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

et donc que S_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1;n+2]\!]$, ce qui assure que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.