À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5236] | 1| Matrice d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, on désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$.
On désigne par $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{B}_q = (f_1, \ldots, f_q)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.

(1). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 3$ et $q = 2$ et on suppose que u est telle que :

$$\begin{cases} u(e_1) &= f_1 + 2f_2 \\ u(e_2) &= 2f_1 - f_2 \\ u(e_3) &= -f_1 + f_2 \end{cases}$$

(a). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par u en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_2$.

(b). Déterminer ensuite la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_2$.

(2). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 3$ et $q = 3$ et donc que $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_q$, et on suppose que u est telle que :

$$\begin{cases} u(e_1) &= 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ u(e_2) &= 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ u(e_3) &= 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

(a). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par u.

(b). Déterminer ensuite la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_3$.

(c). u est-il un automorphisme ?

(3). Dans cette question, on se place dans le cas où $p = 4$ et $q = 4$ et donc que $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_q$, et on suppose que la matrice de u dans $\mathcal{B}_4$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

(a). Expliciter en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_4$, les images des vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$.

(b). Déterminer l'image d'un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par u.

(c). Déterminer le noyau et l'image de u.

Éléments de correction

(1).(a). Il est clair que : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.
Par suite, la linéarité de f donne que :
$$\begin{aligned} u(x) &= x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) \\ &= x_1(f_1 + 2f_2) + x_2(2f_1 - f_2) + x_3(-f_1 + f_2) \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3)f_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)f_2 \end{aligned}$$

(b). Puisque $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que l'on connaît l'image par u des vecteurs de cette base en fonction des vecteurs de la basse $\mathcal{B}_3$, par construction de la matrice d'une application linéaire, la matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2).(a). Il est clair que : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$.

Par suite, la linéarité de f donne que :

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & x_1 u(e_1) + x_2 u(e_2) + x_3 u(e_3) \\ & = & x_1 (3e_1 + 2e_2 + 2e_2) + x_2 (2e_1 + 3e_2 + 2e_3) + x_3 (2e_1 + 2e_2 + 3e_3) \\ & = & (3x_1 + 2e_1 + 2e_3) e_1 + (2x_1 + 3x_2 + 2x_3) e_2 + (2x_1 + 2x_2 + 3x_3) e_3 \end{array}$$

(b). Puisque $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que l'on connaît l'image par u des vecteurs de cette base en fonction des vecteurs de la basse $\mathcal{B}_3$, par construction de la matrice d'une application linéaire, la matrice cherchée est donc $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(c). u étant linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, il s'agit simplement ici de s'assurer de son caractère bijectif pour que ce dernier soit un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
D'après le théorème de caractérisation des automorphismes, on a que :

$$(u \text{ est bijectif}) \quad \Leftrightarrow \quad (A \text{ est inversible})$$

Par ailleurs, la matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à 3, rang que l'on cherche par échelonnement en lignes.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

par suite, A est de rang 3, donc inversible, et par conséquent u est bien bijectif, et donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(3).(a). Par construction de la matrice A, les colonnes de cette dernière sont pour chacune d'entre elles les coordonnées des vecteurs $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$ exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On en déduit donc que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u(e_1) & = & e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4 \\ u(e_2) & = & 2e_2 - e_3 + 3e_4 \\ u(e_3) & = & 2e_1 + e_2 + e_3 + 7e_4 \\ u(e_4) & = & -e_1 - 5e_4 \end{array} \right.$$

(b). En identifiant les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et les éléments de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, l'image de $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par u s'obtient par le produit matriciel AX où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Par suite, on en déduit que :

$$u(x) = (x_1 + 2x_3 - x_4, -x_1 + 2x_3, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4)$$

(c). Par définition : $\quad (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \operatorname{Ker}(u)) \quad \Leftrightarrow \quad (u(x) = (0,0,0,0))$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ est solution} \\ \text{du système de représentation} \\ \text{matricielle } (A|0) \end{array} \right)$$

On résout alors par échelonnement ce système par échelonnement en lignes :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{4}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Il vient alors que : $$(x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in \operatorname{Ker}(u)) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 3x_4 \\ x_2 &= 2x_4 \\ x_3 &= -x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad (x = \in \operatorname{Vect}((3,2,-1,1)))$$
et par suite $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}((3,2,-1,1))$ ce qui donne que $\operatorname{Ker}(u)$ est une droite vectorielle, donc un espace de dimension 1.

D'après le théorème du rang, on a alors : $\quad \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\operatorname{Ker}(u)) + \dim(\operatorname{Im}(u))$

ce qui donne que $\dim(\operatorname{Im}(u)) = 3$.

Or on sait que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$.

La famille $(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$ étant une famille de 4 vecteurs d'un espace de dimension 3, elle est donc nécessairement liée.

On remarque alors que $u(e_1) - u(e_2) - u(e_4) = \overrightarrow{0}$, ce qui assure donc que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$.

La famille $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est alors une famille génératrice 3 vecteurs de $\operatorname{Im}(f)$ qui est un espace de dimension 3, donc par théorème, elle en forme un base.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5237] | 2

Dans tout ce qui suit, f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
On considère par ailleurs les vecteurs $u = (0,1,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (1,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1). Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2). Déterminer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de u, v et w.

(3). Déduire de la question précédente la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.

(4). Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Déterminer alors la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

(5). Exprimer M^2 en fonction de M et de I_3.

(6). On rappelle que Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f^n = \begin{cases} \mathrm{Id} & \text{si} \quad n = 0 \\ f & \text{si} \quad n = 1 \\ \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}} & \text{si} \quad n \geq 2 \end{cases}$

Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ f^n = (2^n - 1) f + (2 - 2^n)\,\mathrm{I}$.

Éléments de correction

(1). En notant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par théorème, la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, la matrice A est inversible, ce qui revient ici puisque $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à montrer que A est de rang 3.

Un échelonnement en lignes donne directement que :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ce qui donne que A est de rang 3, donc inversible et que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

(2). En identifiant les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et les éléments de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on sait que l'image du vecteur $u = (0,1,1)$ s'obtient par le produit matriciel $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et il est en de même pour l'image par f des vecteurs v et w.

On obtient alors que : $\left\{ \begin{array}{rcl} f(u) & = & u \\ f(v) & = & v \\ f(w) & = & 2w \end{array} \right.$

(3). D'après la question précédente, on dispose des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, ce qui permet de construire la matrice N pour obtenir ainsi directement que $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(4). D'après la caractérisation des automorphismes, f est un automorphisme si, et seulement si, l'une de ses représentations matricielles est inversible.
La matrice N étant une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont non nuls, est inversible, et par suite, f est bien un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(5). Un calcul direct donne que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ puis que $M^2 = 3M - 2\mathrm{I}_3$

(6). Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $f^n = (2^n - 1) f + (2 - 2^n) \mathrm{Id}$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Initialisation : il est clair que $f^0 = \mathrm{Id}$
et par ailleurs que : $\begin{array}{rcl} \left(2^1 - 1\right) f + \left(2 - 2^0\right) \mathrm{Id} & = & 0f + 1\mathrm{Id} \\ & = & \mathrm{Id} \end{array}$

ce qui amène que $f^0 = \left(2^0 - 1\right) f + \left(2 - 2^0\right) \mathrm{Id}$ qui est exactement $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
On sait que $f^{n+1} = f \circ f^n$.
Par hypothèse de récurrence, il vient que : $\begin{array}{rcl} f^{n+1} & = & f \circ ((2^n - 1) f + (2 - 2^n) \mathrm{Id}) \\ & = & (2^n - 1) f \circ f + (2 - 2^n) f \circ \mathrm{Id} \\ & = & (2^n - 1) f^2 + (2 - 2^n) f \end{array}$

Par ailleurs, puisque $M^2 = 3M - 2\mathrm{I}_3$, on en déduit que $f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}$ ce qui amène à :

$$\begin{array}{rcl} f^{n+1} & = & (2^n - 1)(3f - 2\mathrm{Id}) + (2 - 2^n) f \\ & = & 3(2^n - 1) f - 2(2^n - 1) \mathrm{Id} + (2 - 2^n) f \\ & = & (3(2^n - 1) + (2 - 2^n)) f + \left(2 - 2^{n+1}\right) \mathrm{Id} \\ & = & (3^n - 3 + 2 + 2^n) f + \left(2 - 2^{n+1}\right) f \\ & = & (2 \times 2^n - 1) f + \left(2 - 2^{n+1}\right) \mathrm{Id} \\ & = & \left(2^{n+1} - 1\right) f + \left(2 - 2^{n+1}\right) \mathrm{Id} \end{array}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence elle est vraie pour tout entier n.