Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2331

On se propose dans cet exercice de déterminer la limite en 0 de la fonction f où :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\arctan\left(x^2 - x^2\cos(x)\right)}{1-\sqrt{\cos(x)}} \end{array} \right. .$$

en commençant par en chercher un équivalent simple en 0.

1. Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $\quad 1-\sqrt{\cos(x)} = \dfrac{1-\cos(x)}{1+\sqrt{\cos(x)}}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{\cos(x)}$.
   En déduire un équivalent lorsque x tend vers 0 de $1-\sqrt{\cos(x)}$.
3. Déterminer un équivalent lorsque x tend vers 0 de $\arctan\left(x^2 - x^2\cos(x)\right)$.
4. En déduire un équivalent lorsque x tend vers 0 de f.
5. Conclure quant à la valeur de la limite éventuelle en 0 de f.
6. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, définir son prolongement.

EX. 2 | Réf. 2190

On considère $P = 2X^9 - 6X^8 - 6X^7 + 26X^6 + 6X^5 - 42X^4 - 2X^3 + 30X^2 - 8$.

1. Trouver trois racines réelles évidentes de P.
2. Déterminer leur ordre de multilplicité.
3. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2162

1. Effectuer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^{\frac{4}{3}}$;
2. Effectuer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. Utiliser le développement limité précédent pour former celui de la fonction $\arcsin$ à l'ordre 5 en 0 ;
4. Effectuer alors le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{1+x^2}$.