Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2333

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq u_n \leq 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1496

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Pour $n \geq 2$, intégrer par parties I_n en posant $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \cos^{n-1}(x)$. En déduire la relation :

$$(R_1) : \quad \forall n \geq 2, \quad nI_n = (n-1)I_2$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(R_2) : \quad 0 < I_{n+1} \leq I_n$

4. Justifier en utilisant (R_1) et (R_2) que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

5. En utilisant la relation (R_1), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(R_4) : \quad \begin{cases} I_{2n} = \dfrac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 5\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2} \times \dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \dfrac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 5\times 3\times 1} \end{cases}$$

6. En utilisant les relations (R_3) et (R_4), montrer les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n))^2}{(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1))^2} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ *sont appelées les intégrales de Wallis.*