Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 0676

1. Pour $n \geq 0$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$.
Étudier leur convergence.

2. Montrer leur égalité à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$

3. Calculer I_n.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4117

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}, \quad M \times N \in \mathcal{E}$.

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

4. On définir alors l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array} \right.$.

- **a.** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
- **b.** Vérifier que T est inversible et démontrer alors que f est un automorphisme de E.
- **c.** Est-ce que la matrice T est diagonalisable ?
- **d.** On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
  - **i.** Montrer que f admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.
  - **ii.** f est-elle diagonalisable ?