Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4402

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est } 2\pi\text{−périodique} \\ \forall x \in \left]-\pi;\pi\right], f(x) = \pi - |x| \end{cases}$

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1688

Un garçon collectionne des images qu'il trouve dans des tablettes de chocolat.
La collection complète est constituée de N images numérotées de 1 à N.
Soit X_i le numéro de l'image obtenue dans la i^{e} tablette achetée.
La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.
Soit T_k le nombre de tablettes qu'il lui faudra acheter pour avoir k images différentes et T le nombre de tablettes qu'il lui faudra acheter pour avoir la collection complète.

1. Calculer $\mathbb{P}\left([T_2 - T_1 = p]\right)$ pour $p \geq 0$.
2. Soit $k \in [\![1;N-1]\!]$.
   Calculer $\mathbb{P}\left([T_{k+1} - T_k = p]\right)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{E}\left(\Delta_k\right)$ où $\Delta_k = T_{k+1} - T_k$.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}\left(T\right)$.

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1303

Le boulevard périphérique d'une grande ville comporte différentes sorties dont une seule permet de rejoindre directement le centre ville. Les conducteurs choisissent indépendamment les uns des autres, l'une des sorties et la probabilité de choisir la sortie « centre ville direct » vaut $p \in \left]0;1\right[$.
On note :

- N la variable aléatoire égale au nombre de conducteurs empruntant le périphérique un jour donné.
- X la variable aléatoire réelle égale au nombre de conducteurs qui empruntent ce jour-là la sortie « centre ville direct ».
- Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de conducteurs qui empruntent une des autres sorties.

1. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   a. Déterminer la loi de X, calculer $\mathbb{E}\left(X\right)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   b. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
2. On suppose dans cette question que X et Y sont indépendantes et on se propose de déterminer les lois de X, Y et N.
   a. Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$(i+j)!\,\mathbb{P}\left(N = i+j\right) = \frac{i!\,\mathbb{P}\left([X=i]\right)}{p^i} \times \frac{j!\,\mathbb{P}\left(Y=j\right)}{q^j}$$

b. On considère les deux suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n!\mathbb{P}\left([X = n]\right)}{p^n} \quad \text{et } v_n = \frac{n!\mathbb{P}\left(Y = n\right)}{q^n}$$

Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que $v_{n_0} \neq 0$ et montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

c. Déterminer les lois de probabilités de X et Y.

d. En déduire la loi de probabilité de N.