Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5308

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = 2t - 1$.

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer la limite de $I(n, n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I\,(p+1, q-1)$$

c. En déduire que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I\,(p, q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

3. a. Pour tout $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k\,(1-t)^k$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$.

Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5310

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est nilpotent s'il existe un entier k tel que $f^k = \tilde{0}$ où l'on rappelle que $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$ et $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si f est un endomorphisme nilpotent, on appelle indice de nilpotence de f le plus plus petit entier p tel que $f^p = \tilde{0}$ où donc $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.

Une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est dite nilpotente si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé est nilpotent. On définit de même son indice de nilpotence.

1. Dans cette question uniquement, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et on suppose que A n'est pas la matrice nulle.

a. Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.

b. Montrer que $ad - bc = 0$.

c. Montrer que $a + d = 0$.

d. Déterminer alors l'indice de nilpotence de A.

2. Dans cette question uniquement, f désgine un endomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que si l'on suppose de plus que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $f^2 = \tilde{0}$.

b. Étudier la réciproque.

c. On suppose de plus que f est un endomorphisme nilpotent non nul de $\mathbb{R}^2$. Donner la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ et celle de $\mathrm{Ker}\,(f)$.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^2$ et qu'il existe deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ non nuls et nilpotents tels que $f = u \circ v$.

   a. Montrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(u)$ et que $\operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Ker}(f)$.

   b. En déduire que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(v)$.

   c. Que peut-on en conclure ?