Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2331

On se propose dans cet exercice de déterminer la limite en 0 de la fonction f où :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\arctan\left(x^2 - x^2\cos(x)\right)}{1-\sqrt{\cos(x)}} \end{array} \right. .$$

en commençant par en chercher un équivalent simple en 0.

1. Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $\quad 1-\sqrt{\cos(x)} = \dfrac{1-\cos(x)}{1+\sqrt{\cos(x)}}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{\cos(x)}$.
En déduire un équivalent lorsque x tend vers 0 de $1-\sqrt{\cos(x)}$.

3. Déterminer un équivalent lorsque x tend vers 0 de $\arctan\left(x^2 - x^2\cos(x)\right)$.

4. En déduire un équivalent lorsque x tend vers 0 de f.

5. Conclure quant à la valeur de la limite éventuelle en 0 de f.

6. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, définir son prolongement.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2331

1. Se rappeler comme ransformer des expressions du type $a\sqrt{b}+c$ ou $\dfrac{1}{a\sqrt{b}+c}$ à l'aide de la « quantité conjuguée »

2. C'est un simple calcul de limite pour pouvoir utiliser les équivalents usuels.

3. Utiliser les équivalents usuels.

4. Exploiter les résultats des questions précédentes.

5. Utiliser un équivalent pour un calcul de limites.

6. Revenir à la définition du prolongement par continuité.

EX. 2 | Réf. 2190

On considère $P = 2X^9 - 6X^8 - 6X^7 + 26X^6 + 6X^5 - 42X^4 - 2X^3 + 30X^2 - 8$.

1. Trouver trois racines réelles évidentes de P.

2. Déterminer leur ordre de multilplicité.

3. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2190

1. Essayer des valeurs tirées de l'ensemble des nombres sympathiques.

2. Soit on effectue des divisions successives, soit on utilise un autre théorème...

3. On exploite les ordres de multiplicité obtenus pour avoir une première partie de factorisation.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2162

1. Effectuer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^{\frac{4}{3}}$;
2. Effectuer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. Utiliser le développement limité précédent pour former celui de la fonction $\arcsin$ à l'ordre 5 en 0 ;
4. Effectuer alors le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{1+x^2}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2162

1. Mettre en oeuvre la forme de $(1+x)^{\alpha}$ avec la bonne valeur de α.
2. Même chose.
3. On primitive en expliquant pourquoi on le fait !
4. C'est un produit de développements limités.