Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2333

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leq u_n \leq 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2333

- On utilise l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[n; n+1]$ pour la fonction $x \longrightarrow \sqrt{x}$.
- On prend la partie droite de l'inégalité précédente, et on la somme entre 1 et n.
- On prend la partie gauche de l'inégalité précédente, et on la somme entre 1 et n.
- Il y a un petit changement d'indices à faire et à remarquer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1} - u_1$.
- En divisant l'inégalité précédente par l'équivalent de u_n dont il faut intuiter un peu la valeur en analysant cette même inégalité, on obtient un équivalent de u_n que l'on peut sûrement améliorer encore !

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1496

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Pour $n \geq 2$, intégrer par parties I_n en posant $u'(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \cos^{n-1}(x)$. En déduire la relation :

$$(R_1) : \quad \forall n \geq 2, \quad nI_n = (n-1)I_2$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(R_2) : \quad 0 < I_{n+1} \leq I_n$

4. Justifier en utilisant (R_1) et (R_2) que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

5. En utilisant la relation (R_1), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(R_4) : \quad \begin{cases} I_{2n} = \dfrac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times 5\times 3\times 1}{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 6\times 4\times 2} \times \dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} = \dfrac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 5\times 3\times 1} \end{cases}$$

6. En utilisant les relations (R_3) et (R_4), montrer les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n))^2}{(1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1))^2} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ *sont appelées les intégrales de Wallis.*

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | `Réf. 1496`

- Écrire ce que sont I_0 et I_1 et les calculer directement.
- On écrit que $\cos^n(x) = \cos^{n-1}(x) \times \cos(x)$ et on intègre par parties.
- On étudie le signe de $I_{n+1} - I_n$ ou on utilise des majorations et la croissance de l'intégrale.
- On compare I_{2n}, I_{2n+1} et $I_{2n+2}\dots$
- On raisonne de proche en proche pour établir ces relations.