Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 0676

1. Pour $n \geq 0$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$.

   Étudier leur convergence.
2. Montrer leur égalité à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$
3. Calculer I_n.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0676

1. Penser au théorème de majoration...
2. RAS
3. Que vaut $2I_n$?

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4117

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{E}$.
2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M,N) \in \mathcal{E}, \quad M \times N \in \mathcal{E}$.
3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.
4. On définir alors l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array} \right.$.
   - **a.** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
   - **b.** Vérifier que T est inversible et démontrer alors que f est un automorphisme de E.
   - **c.** Est-ce que la matrice T est diagonalisable ?
   - **d.** On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{E}$.
     - **i.** Montrer que f admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.
     - **ii.** f est-elle diagonalisable ?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4117

1. On peut répondre aux deux questions en même temps à condition de montrer la liberté de la famille (A,B,C).
2. On effectue le produit matriciel pour deux matrices quelconques de $\mathcal{E}$ et on montre que le produit obtenu est encore dans $\mathcal{E}$.

3. Il est facile d'avoir l'expression de M^{-1} en fonction de M et de conclure...
4. a. RAS
   b. RAS pour l'inversibilité de T. Pour le caractère bijectif de f utiliser le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en n'étudiant que le caractère injectif de f.
   c. La réponse est dans la question.
   d. i. Commencer par exprimer F pour obtenir les éléments propres de f demandés.
      ii. Raisonner par l'absurde pour conclure.