Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4402

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f \text{ est } 2\pi\text{−périodique} \\ \forall x \in \left]-\pi;\pi\right],\, f(x) = \pi - |x| \end{cases}$

1. Déterminer la série de Fourier de f.
2. La série de Fourier de f converge-t-elle vers f ?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4402

1. On pourra commencer par contruire la représentation graphique de f sur $\mathbb{R}$ pour avoir une idée des éventuels problèmes de continuité de f puis on mettra en forme le développement en série de Fourier de la fonction f.
2. On utilisera alors le théorème de Dirichlet pour conclure quant à la convergence de la série de Fourier de f.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1688

Un garçon collectionne des images qu'il trouve dans des tablettes de chocolat.
La collection complète est constituée de N images numérotées de 1 à N.
Soit X_i le numéro de l'image obtenue dans la i^e tablette achetée.
La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$.
Soit T_k le nombre de tablettes qu'il lui faudra acheter pour avoir k images différentes et T le nombre de tablettes qu'il lui faudra acheter pour avoir la collection complète.

1. Calculer $\mathbb{P}\left([T_2 - T_1 = p]\right)$ pour $p \geq 0$.
2. Soit $k \in [\![1;N-1]\!]$.
   Calculer $\mathbb{P}\left([T_{k+1} - T_k = p]\right)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbb{E}\left(\Delta_k\right)$ où $\Delta_k = T_{k+1} - T_k$.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}\left(T\right)$.

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1688

1. On pourra montrer que la variable aléatoire $T_2 - T_1$ suit une loi géométrique dont on identifiera le paramètre.
2. On pourra montrer que la variable aléatoire $T_{k+1} - T_k$ suit une loi géométrique dont on identifiera le paramètre.
3. On remarquera que $T = T_N = T_N - T_{N-1} + \ldots + T_k - T_{k-1} + \ldots + T_1 - T_1 + T_1$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1303

Le boulevard périphérique d'une grande ville comporte différentes sorties dont une seule permet de rejoindre directement le centre ville. Les conducteurs choisissent indépendamment les uns des autres, l'une des sorties et la probabilité de choisir la sortie « centre ville direct » vaut $p \in]0;1[$.

On note :

- N la variable aléatoire égale au nombre de conducteurs empruntant le périphérique un jour donné.
- X la variable aléatoire réelle égale au nombre de conducteurs qui empruntent ce jour-là la sortie « centre ville direct ».
- Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de conducteurs qui empruntent une des autres sorties.

1. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Déterminer la loi de X, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

b. Démontrer que X et Y sont indépendantes.

2. On suppose dans cette question que X et Y sont indépendantes et on se propose de déterminer les lois de X, Y et N.

a. Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$(i+j)!\mathbb{P}(N = i+j) = \frac{i!\mathbb{P}([X=i])}{p^i} \times \frac{j!\mathbb{P}(Y=j)}{q^j}$$

b. On considère les deux suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n!\mathbb{P}([X=n])}{p^n} \quad \text{et } v_n = \frac{n!\mathbb{P}(Y=n)}{q^n}$$

Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que $v_{n_0} \neq 0$ et montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

c. Déterminer les lois de probabilités de X et Y.

d. En déduire la loi de probabilité de N.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1303

1. a. On utilisera le système complet d'événements associé à la variable aléatoire N.

b. Y suit une loi du même type que X et il restera à s'assurer que $\mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}([Y=j]) = \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$.

2. a. On exploitera le caractère indépendant et on remarquera que $[X=i] \cap [Y=j] = [X=i] \cap [N=i+j]$.

b. On remarque que $u_k v_n = u_{k-1} v_{n+1}$ et on exploite le fait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=n]) = 1$ pour justifier qu'il existe n_0 tel que v_{n_0} est non nul.

c. On exploite les deux questions précédentes pour obtenir l'expression de $\mathbb{P}([X=n])$ et $\mathbb{P}([Y=n])$ puis reconnaître leur loi.

d. Même remarque.