Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5308

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = 2t - 1$.

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer la limite de $I(n, n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} I\,(p+1, q-1)$$

c. En déduire que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I\,(p, q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

3. **a.** Pour tout $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k\,(1-t)^k$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$.

Montrer que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5308

1. On procède au changement de variables proposé pour retomber sur la dérivée d'une fonction bien connue !

2. **a.** On commencera par montrer que la fonction $t \longmapsto t(1-t)$ est majorée par $\dfrac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$ avant d'utiliser la croissance de l'intégrale.

b. On procèdera à une intégration par parties.

c. On explicite la formule rang après rang jusqu'à arriver à au rang 0 pour q.

3. **a.** On reconnaît une somme de la forme $\sum q^k$.

b. On remarquera par exemple que $I\,(k, k)$ est presque le terme général de la somme définissant S_n, pour utiliser la linéarité de l'intégrale et ensuite la somme précédente pour obtenir l'intégrale initialement calculée, et une intégrale que l'on majorera de sorte à pouvoir passer à la limite toujours en utilisant l'intégrale du début.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5310

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est nilpotent s'il existe un entier k tel que $f^k = \tilde{0}$ où l'on rappelle que $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$ et $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si f est un endomorphisme nilpotent, on appelle indice de nilpotence de f le plus plus petit entier p tel que $f^p = \tilde{0}$ où donc $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.

Une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est dite nilpotente si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé est nilpotent. On définit de même son indice de nilpotence.

1. Dans cette question uniquement, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et on suppose que A n'est pas la matrice nulle.
   - **a.** Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.
   - **b.** Montrer que $ad - bc = 0$.
   - **c.** Montrer que $a + d = 0$.
   - **d.** Déterminer alors l'indice de nilpotence de A.
2. Dans cette question uniquement, f désgine un endomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^2$.
   - **a.** Montrer que si l'on suppose de plus que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $f^2 = \tilde{0}$.
   - **b.** Étudier la réciproque.
   - **c.** On suppose de plus que f est un endomorphisme nilpotent non nul de $\mathbb{R}^2$. Donner la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ et celle de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^2$ et qu'il existe deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ non nuls et nilpotents tels que $f = u \circ v$.
   - **a.** Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(u)$ et que $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}\,(f)$.
   - **b.** En déduire que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Im}\,(v)$.
   - **c.** Que peut-on en conclure ?

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5310

1. Le calcul et la relation cherchée ne pose pas de difficulté particulière.
2. **a.** On reconnaît le déterminant de A et la condition d'inversibilité qui en découle. On effectuera un raisonnement par l'absurde en supposant A inversible, le caractère nilpotent induisant alors une contradiction.
   - **b.** On pourra alors exprimer A^n en fonction de n, et le caractère nilpotent permettra encore de conclure.
   - **c.** On obtient alors que $A^2 = (0)$ et il reste à conclure...
3. **a.** On identifiera bien ce que cela signifie que $f^2 = \tilde{0}$ et on exploitera l'inclusion entre $Im(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$ pour l'établir.
   - **b.** On suppose que $f^2 = \tilde{0}$, et on regarde si l'on a bien l'inclusion demandée en se fixant proprement les objectifs à atteindre.
   - **c.** Le théorème du rang et l'inclusion précdente permet de conclure.
4. **a.** On commencera par remarquer que f, u et v satisfont aux conditions de la question précdente et on pourra don utiliser tous les résultats établis. On raisonnera par double-inclusion, raisonnement que l'on pourra raccourcir par des arguments de dimension.
   - **b.** On dispose d'une multitude d'égalité d'ensembles...
   - **c.** On explicitera $f(x)$ à l'aide de toutes ces informations pour conclure.