**À noter & À garder en tête**

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

## Un peu de technique

### Exercice| [5205] | 1| Calcul de sommes | Extrait TSE 2022 Filière BL

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2$.

**(1).** Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $T_p = S_{2p}$.

- **(a).** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $T_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} T_k - T_{k-1}$.
- **(b).** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $T_p - T_{p-1}$.
- **(c).** Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de $T_p$, puis celle de $S_n$ si $n$ est pair.

**(2).** Si $n$ est impair, quelle formule a-t-on pour $S_{n-1}$ ? En déduire une expression pour $S_n$.

**(3).** Donner une expression générale de $S_n$ ne dépendant pas de la parité de $n$.

**Pistes de réflexion**

**(1).(a).** On observera que l'on effectue la somme de la différence de deux termes successifs d'une même suite.

- **(b).** Il suffit d'expliciter les deux sommes, d'en faire la différence en observant que des termes de l'une s'éliminent avec des termes de l'autre. On restera très vigilant au début sur l'explicitation des indices terminaux des sommes, et on pourra remarquer que le résltat se simplifie bien...
- **(c).** On réinvestit les résultats précédents en partant que $S_n = T_{2p}$ avec $n = 2p$, et on fera apparaître des sommes de référence.

**(2).** Si $n$ est impair, alors $n-1$ est pair...

**(3).** On utilise les expressions précdentes avec des écritures du type $n = 2p$ ou $n = 2p+1$ pour gérer les différents cas de parité de $n$.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

### Exercice| [5206] | 2

Dans tout cet exercice, $A$ désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On désigne par : $E_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = M\}$ et $E_2(A) = \left\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ A^2M = AM\right\}$.

**(1).** Montrer que l'on a : $E_1(A) \subset E_2(A)$.

**(2).** On suppose **dans cette question uniquement** que la matrice $A$ est inversible.
Montrer alors que $E_1(A) = E_2(A)$.

**(3).** On suppose **dans cette question uniquement** que la matrice $A - \mathrm{I}_3$ est inversible.
Montrer alors que $E_1(A) = \{0\}$.

**(4).** Montrer que $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

**(5).** Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

### Pistes de réflexion

**(1).** Il s'agit de montrer que si $M \in E_1(A)$, alors $M \in E_2(A)$.

**(2).** Un sens de l'égalité d'ensemble est déjà obtenue à la question précédente, il reste à prouver l'autre sur le même principe en utilisant l'inversibilité de $A$.

**(3).** On s'inspirera des questions précédentes pour montrer que $E_1(A) \subset \{0\}$ et que $\{0\} \subset E_1(A)$.

**(4).** On mettra en oeuvre les trois points à vérifier, notamment la stabilité par combinaison linéaire de ces deux ensembles.

**(5).** On remarquera que $B$ est inversible…, puis on essaiera de caractériser les éléments de $E_1(B)$ en en cherchant une famille génératrice en exploitant la définition de $E_1(B)$. Ou alors…