Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | `Réf. 2385`

1. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la forme λx^α où $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ de $f(x) = \left((\cos(x))^{x^2} - 1\right)\tan^3(x)$.
2. Déterminer la limite en 1^- de $g(x) = \ln(x)\ln(1-x)$.
3. **a.** Montrer que $\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$.

   b. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

EX. 1 | Éléments de correction | `Réf. 2385`

1. Pour x au voisinage de 0, on peut écrire : $\quad (\cos(x))^{x^2} - 1 = \mathrm{e}^{x^2\ln(\cos(x))} - 1$.
   Comme $x^2\ln(\cos(x)) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit donc que $\mathrm{e}^{x^2\ln(\cos(x))} - 1 \underset{x\to0}{\sim} x^2\ln(\cos(x))$.
   Par ailleurs puisque $\ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos(x)-1)$ et que $\cos(x)-1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, on a donc $\ln(\cos(x)) \underset{x\to0}{\sim} \cos(x)-1$ et donc $\ln(\cos(x)) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.
   Ainsi, $x^2\ln(\cos(x)) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^4}{2}$ et donc $(\cos(x))^{x^2} - 1 \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^4}{2}$.
   De plus comme $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, il vient que $\tan^3(x) \underset{x}{\sim} 0, x^3$ et ainsi $f(x) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^7}{2}$
2. On a $\ln(x) = \ln(1+x-1)$ et ainsi au voisinage de 1 : $\quad \ln(x) \underset{x\to1^-}{\sim} x-1$. Ainsi $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to1^-}{\sim} (x-1)\ln(1-x) = -(1-x)\ln(1-x)$. En posant ensuite $X = 1-x$ et en remarquant que $X \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 0$ et que $X\ln(X) \underset{X\to0}{\longrightarrow} 0$, il vient que $\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 0$.
3. **a.** Il s'agit de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0$. Or en posant $X = \ln(x)$, il vient que $X \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ainsi comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X} = 0$, il vient que $\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui est ce que l'on voulait.

   b. Pour x au voisinage de $+\infty$, on peut écrire :
   $$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\ln(x)) - \frac{\ln(x)}{x}}\\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\ln(x))}\times\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)}{x}}\end{aligned}$$
   Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ on en déduit que $\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Comme $\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$, on en déduit que $\dfrac{1}{x}\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$ et ainsi $\dfrac{1}{x}\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\ln(x))} = 1$.
   Ainsi $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2333

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leq u_n \leq 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) + 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2333

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ainsi, pour tout $x \in]n; n+1[$, on a $n \leq x \leq n+1$ et donc $2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{n+1}$ et par passage à l'inverse $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
Par conséquent :
- la fonction f est continue sur $[n; n+1]$;
- la fonction f est dérivable sur $]n; n+1[$;
- pour tout $x \in]n; n+1[$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur l'intervalle $[n; n+1]$, il vient :
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}}(n+1-n) \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}(n+1-n)$$ ce qui conduit à l'inégalité demandée.

2. a. D'après l'inégalité précédente, il vient : $\sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ donc par suite $\sqrt{n+1} - \sqrt{1} \leq \frac{1}{2} u_n$ et finalement $2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leq u_n$.
De même $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ qui donne avec le changement d'indice $\ell = k+1$:
$$\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ell}} \leq \sum_{\ell=2}^{n+1} \left(\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell-1}\right) \text{ et ainsi } \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \leq 2 \sum_{\ell=2}^{n+1} \left(\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell-1}\right).$$
Or $\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\ell}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{1}}$ c'est à dire $\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\ell}} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$. On obtient alors :
$$u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}\right) \text{ ce qui donne } u_n \leq 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 1$$
et on obtient ainsi l'encadrement demandé pour u_n.

b. En divisant l'encadrement précédent par $2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$, il vient : $$1 \leq \frac{u_n}{2\sqrt{n+1}-1} \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}$$

On montre alors que $\frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par le théorème d'encadrement que $\frac{u_n}{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et finalement que $u_n \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$.
De plus $\frac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}} = 2\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ avec $\frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et finalement $2\sqrt{n+1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ qui conduit à $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.