Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2331

On se propose dans cet exercice de déterminer la limite en 0 de la fonction f où :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\arctan\left(x^2 - x^2\cos(x)\right)}{1-\sqrt{\cos(x)}} \end{array}\right. .$$

en commençant par en chercher un équivalent simple en 0.

1. Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$, $\quad 1-\sqrt{\cos(x)} = \dfrac{1-\cos(x)}{1+\sqrt{\cos(x)}}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{\cos(x)}$.
   En déduire un équivalent lorsque x tend vers 0 de $1-\sqrt{\cos(x)}$.
3. Déterminer un équivalent lorsque x tend vers 0 de $\arctan\left(x^2 - x^2\cos(x)\right)$.
4. En déduire un équivalent lorsque x tend vers 0 de f.
5. Conclure quant à la valeur de la limite éventuelle en 0 de f.
6. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, définir son prolongement.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2331

1. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$,
$$1-\sqrt{\cos(x)} = \frac{\left(1-\sqrt{\cos(x)}\right)\left(1+\sqrt{\cos(x)}\right)}{1+\sqrt{\cos(x)}} = \frac{1-\cos(x)}{1+\sqrt{\cos(x)}}$$
2. Puisque $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) = 1$, on en déduit que $1+\sqrt{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$, et ainsi $1+\sqrt{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 2$. Par ailleurs, $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$. Par conséquent on obtient $1-\sqrt{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{4}$.
3. On a $x^2 - x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\arctan\left(x^2-x^2\cos(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 - x^2\cos(x)$. De plus, $x^2 - x^2\cos(x) = x^2\left(1-\cos(x)\right)$ et donc $x^2 - x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \times \dfrac{x^2}{2}$. Finalement, $\arctan\left(x^2-x^2\cos(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^4}{2}$.
4. On en déduit par quotient que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$.
5. Par suite, puisque $\lim\limits_{x\to 0} 2x^2 = 0$, il vient par équivalence que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
6. Puisque f admet une limite finie en 0, f est prolongeable par continuité en 0, et son prolongement g est donc la fonction définie par
$$g : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{\arctan\left(x^2-x^2\cos(x)\right)}{1-\sqrt{\cos(x)}} \text{ sinon} \end{cases} \end{array}\right. .$$

EX. 2 | Réf. 2190

On considère $P = 2X^9 - 6X^8 - 6X^7 + 26X^6 + 6X^5 - 42X^4 - 2X^3 + 30X^2 - 8$.

1. Trouver trois racines réelles évidentes de P.
2. Déterminer leur ordre de multilplicité.
3. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2190

1. Les nombres -1, 1 et 2 sont racines « évidentes » de P.
2.
   - On a : $P'(X) = 18X^8 - 48X^7 - 42X^6 + 156X^5 + 30X^4 - 168X^3 - 6X^2 + 60X$. De plus -1, 1 et 2 sont encore racines de P'.
   - On a : $P''(X) = 144X^7 - 336X^6 - 252X^5 + 780X^4 + 120X^3 - 504X^2 - 12X + 60$. Seuls -1 et 1 sont encore racines P''.
   - On a : $P'''(X) = 1008X^6 - 2016X^5 - 1260X^4 + 3120X^3 + 360X^2 - 1008X - 12$. Seul -1 est encore racine de P'''.
   - On a : $P^{(4)}(X) = 6048X^5 - 10080X^4 - 5040X^3 + 9360X^2 + 720X - 1008$. Aucun de ces trois nombres n'est racine de $P^{(4)}$.

   Ainsi, 2 est une racine de multiplicité 2, 1 est une racine de multiplicité 3 et -1 est une racine de multiplicité 4.
3. Ainsi : $P(X) = 2(X-2)^2(X-1)^3(X+1)^4$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2162

1. Effectuer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^{\frac{4}{3}}$;
2. Effectuer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. Utiliser le développement limité précédent pour former celui de la fonction $\arcsin$ à l'ordre 5 en 0 ;
4. Effectuer alors le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{1+x^2}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2162

1. On utilise la formule du développement limité de $(1+x)^\alpha$ avec x au voisinage de 0 et $\alpha = \dfrac{4}{3}$.

   On a ainsi : $(1+x)^{\frac{4}{3}} = 1 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-1\right)}{2}x^2 + \dfrac{\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.

   Finalement : $(1+x)^{\frac{4}{3}} = 1 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{2}{9}x^2 + -\dfrac{4}{81}x^3 + \underset{0}{o}\left(x^3\right)$.
2. On commence par écrire $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

   On effectue alors le dévéloppement limité à l'ordre 2 de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $u = -x^2$ qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0.

   Ainsi : $(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{u}{2} + \dfrac{3}{8}u^2 + \underset{0}{o}\left(u^2\right)$.

   Ce qui donne : $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{8}x^4 + \underset{0}{o}\left(x^4\right)$.
3. On sait que $\arcsin(x) \underset{\text{se dérive en}}{\leadsto} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc en intégrant le développement limité précédent et en tenant compte de la valeur de $\arcsin(0) = 0$, il vient :

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \underset{0}{o}\left(x^5\right)$$

4. On sait que $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \underset{0}{o}\left(x^5\right)$. En mutlipliant le développement limité de $\arcsin$ et de $\dfrac{1}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 5, on obtiendra le développement limité cherché :

$$\frac{\arcsin(x)}{1+x^2} = x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{109}{120}x^5 + \underset{0}{o}\left(x^5\right)$$