Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2333

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq u_n \leq 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

b. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2333

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Ainsi, pour tout $x \in]n; n+1[$, on a $n \leq x \leq n+1$ et donc $2\sqrt{n} \leq 2\sqrt{x} \leq 2\sqrt{n+1}$ et par passage à l'inverse $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
Par conséquent :

- la fonction f est continue sur $[n; n+1]$;
- la fonction f est dérivable sur $]n; n+1[$;
- pour tout $x \in]n; n+1[$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur l'intervalle $[n; n+1]$, il vient :
$\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}(n+1-n) \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}(n+1-n)$ ce qui conduit à l'inégalité demandée.

2. a. D'après l'inégalité précédente, il vient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ donc par suite $\sqrt{n+1} - \sqrt{1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ et finalement $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \leq u_n$.
De même $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ qui donne avec le changement d'indice $\ell = k+1$:
$$\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ell}} \leq \sum_{\ell=2}^{n+1}\left(\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell-1}\right) \text{ et ainsi } \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \leq 2\sum_{\ell=2}^{n+1}\left(\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell-1}\right).$$
Or $\displaystyle\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\ell}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{1}}$ c'est à dire $\displaystyle\sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\ell}} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$. On obtient alors :
$$u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1 \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}\right) \text{ ce qui donne } u_n \leq 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 1$$
et on obtient ainsi l'encadrement demandé pour u_n.

b. En divisant l'encadrement précédent par $2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$, il vient : $\quad 1 \leq \dfrac{u_n}{2\sqrt{n+1} - 1} \leq 1 + \dfrac{1 - \frac{1}{n+1}}{2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)}$

On montre alors que $\dfrac{1 - \frac{1}{n+1}}{2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par le théorème d'encadrement que $\dfrac{u_n}{2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et finalement que $u_n \underset{x \to +\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$.

De plus $\dfrac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}}=2\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ avec $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et finalement $2\sqrt{n+1}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ qui conduit à $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1496

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour $n\geq 2$, intégrer par parties I_n en posant $u'(x)=\cos(x)$ et $v(x)=\cos^{n-1}(x)$. En déduire la relation :
$$(R_1):\quad \forall n\geq 2,\quad nI_n=(n-1)I_2$$
3. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $(R_2):\quad 0<I_{n+1}\leq I_n$
4. Justifier en utilisant (R_1) et (R_2) que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1$.
5. En utilisant la relation (R_1), montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$(R_4):\quad \begin{cases} I_{2n}=\dfrac{(2n-1)\times(2n-3)\times\ldots\times5\times3\times1}{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times6\times4\times2}\times\dfrac{\pi}{2} \\ I_{2n+1}=\dfrac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times4\times2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times5\times3\times1}\end{cases}$$
6. En utilisant les relations (R_3) et (R_4), montrer les deux propriétés suivantes :
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(2\times4\times6\times\ldots\times(2n)\right)^2}{(1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1))^2}\times\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2} \text{ et } \sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ sont appelées les intégrales de Wallis.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1496

1. On obtient directement que $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $I_1=1$.
2. Soit $n\geq 2$, on intègre par parties en posant $\begin{array}{lcl} u(x)=\cos^{n-1}(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x)=-(n-1)\sin(x)\cos^{n-2}(x) \\ v(x)=\sin(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x)=\cos(x)\end{array}$,

   u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$:
$$\begin{aligned} I_n &= \left[\sin(x)\cos^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2(x)\right)\cos^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^{n-2}(x)-\cos^n(x)\right)\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n \text{ ce qui donne bien } nI_n=(n-1)I_{n-2}\end{aligned}$$
3. La fonction $x\longmapsto\cos^{n+1}(x)$ est continue et est positive strictement sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on $I_{n+1}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x>0$.

   Par ailleurs, pour $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0\leq\cos(x)\leq1$, donc $\cos^{n+1}(x)\leq\cos^n(x)$, ce qui par monotonie de l'intégrale donne que $I_{n+1}\leq I_n$.
4. D'après la relation (R_2), pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0<I_{2n+2}\leq I_{2n+1}\leq I_{2n}$. Comme $I_{2n}>0$, on en déduit que

$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$.

D'après (R_1), on a $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$. Ainsi, on en déduit l'encadrement $\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq 1$ pour tout n. En passant à la limite dans cet encadrement, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = 1$.

5. Pour tout $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, et donc :

- $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $\quad I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$, $\quad I_4 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$, ..., et de proche en proche, on obtient :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

- De même, on obtientrait $I_{2n+1} = \frac{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \ldots 5 \times 3} \times 1 = \frac{(2n) \times \ldots \times 6 \times 4 \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \ldots \times 5 \times 3 \times 1}$.

6. De (R_3), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\pi}{2}$.

Or $\frac{\pi}{2} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n))^2}{(1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1))^2} \times \frac{1}{2n+1}$.

Ainsi, on a montré que $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n))^2}{(1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1))^2} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$, ce que l'on peut écrire en termes d'équivalents en $\frac{(2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n))^2}{(1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1))^2} \times \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$, on encore en prenant la racine carrée : $\frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)} \times \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Le membre de gauche de cette relation étant $I_{2n+1}\sqrt{2n+1}$, on a donc obtenu $\sqrt{2n+1} I_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et comme $I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{2n+1}$ et $\sqrt{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n+1}$, on en déduit que $\sqrt{2n} I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et par suite $\sqrt{n} I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.