Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4400

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes définie sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$.
On désigne alors par Y la variable aléatoire égale au maximum des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n, c'est à dire que $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4400

1. Support de Y : Y étant égal au maximum des variables aléatoires X_1, ..., X_n, il est possible que chaque X_i prenne sa valeur minimale c'est à dire 0, comme il est possible que l'une d'entre elle prenne sa valeur maximale qui est n.
Ainsi, $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$.

Loi de Y : soit $k \in [\![1;n]\!]$. Il vient que : $[Y \leq k] = [X_1 \leq k] \cap \ldots \cap [X_n \leq k]$.
Par suite, comme les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont suppposées indépendantes, il vient :

$$\mathbb{P}([Y \leq k]) = \mathbb{P}([X_1 \leq k]) \times \ldots \times \mathbb{P}([X \leq k])$$

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, X_i suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ et donc : $\mathbb{P}([X_i \leq k]) = \frac{k}{n}$.

On en déduit donc que : $\mathbb{P}([Y \leq k]) = \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Il vient alors :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y = k]) &= \begin{cases} \mathbb{P}([Y \leq 1]) \text{ si } k = 1 \\ \mathbb{P}([Y \leq k]) - \mathbb{P}([Y \leq k-1]) \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{1}{n}\right)^n \text{ si } k = 1 \\ \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n \text{ si } k \geq 2 \end{cases} \\
&= \left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

2. Y étant une variable aléatoire à support fini, elle admet une espérnce qui est alors égale à :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k \times \mathbb{P}([Y = k])$$

On a alors :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\left(\frac{k}{n}\right)^n - \left(\frac{k-1}{n}\right)^n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k}{n}\right)^n - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{k-1}{n}\right)^n \\
&= \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k^{n+1} - \frac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)^n \\
&= \frac{1}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(k-1+1)(k-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(k-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{n^n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k^{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} k^n\right) \\
&= \frac{1}{n^n}\left(n^{n+1} - 0 - \sum_{k=0}^{n-1} k^n\right) \\
&= n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4401

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Un sac contient n jetons.
On tire successivement et sans remise deux jetons de ce sac.
On désigne par X la variable aléatoire égale au premier numéri tiré, et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro tiré.

1. Identifier la loi de X et donner $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la loi de Y et donner $\mathbb{E}(Y)$.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. On définit la variable aléatoire Z par : $Z = |X - Y|$.
   a. Expliciter le support $Z(\Omega)$ de Z.
   b. Soit $k \in Z(\Omega)$. Justifier que $[Z = k] = ([Z = k] \cap [X > Y]) \cup ([Z = k] \cap [X < Y])$.
   c. En déduire la loi de Z.
   d. Justifier que Z admet une espérance puis la calculer.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4401

1. **Support de X :** X prend clairement ses valeurs entre 1 et n, d'où $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
   Loi de X : on peut supposer lors du premier tirage que tous les tirages sont équiprobables.
   Par suite, X suit la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1; n]\!]$.
   Espérance de X : comme X suit une loi uniforme sur l'ensemble $[\![1; n]\!]$, Y admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. **Support de Y :** dès lors que le jeton numéro 1 ou n n'a pas été tiré lors du premier tirage, Y peut prendre toutes les valeurs entre 1 et n. Ainsi, $Y(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
   Loi de Y : soit $j \in [\![1; n]\!]$. Les événements $([X = i])_{i \in [\![1;n]\!]}$ forment un système complet d'événements de probabi-

lités non nulles. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \\
&= \underbrace{\mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=i])}_{=0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \mathbb{P}([X=i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \times (n-1) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Par suite, Y suit aussi la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$.

Espérance de Y : comme Y suit une loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$, Y admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+1}{2}$.

3. X et Y étant deux variables aléatoires à support fini, la variable aléatoire XY admet une espérance qui vaut par définition :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;n]\!]} i \times j \times \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j])$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i \times j \times \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i \times i \times \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=i]) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j]) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j \times \frac{1}{n(n-1)} \right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} i \times j
\end{aligned}$$

Par suite :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i\left(\sum_{j=1}^{n}j-i\right)\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}i\left(\frac{n(n+1)}{2}-i\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\
&= \frac{n+1}{2(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{2n+1}{3}\right)\\
&= \frac{n+1}{2(n-1)}\times\frac{3n^2+3n-4n-2}{6}\\
&= \frac{n+1}{2(n-1)}\times\frac{3n^3-n-2}{6}\\
&= \frac{n+1}{2(n-1)}\times\frac{(n-1)(3n+2)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, il vient :
$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{(n+1)(3n+2)}{12}-\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{2}\\
&= \frac{n+1}{2}\left(\frac{3n+2}{6}-\frac{n+1}{2}\right)\\
&= \frac{n+1}{2}\times\frac{3n+2-3n-3}{12}\\
&= -\frac{n+1}{12}
\end{aligned}$$

4. On sait que : (X et Y sont indépendantes) $\Leftrightarrow$ $(\forall(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])=\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=$

Or ici, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) &= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n^2}\\
\text{mais } \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) &= \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}_{[X=1]}([Y=1])\\
&= \frac{1}{n}\times 0\\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, X et Y ne sont pas indépendantes.

5. a. Puisque X et Y ne peuvent prendre la même valeur, Z prendra au minimum la valeur 1 lorsque l'écart entre X et Y est minimal ce qui arrive lorsque X et Y donnent des valeurs qui se suivent, et au maximum $n-1$ lorsque X et Y prendront pour l'une sa valeur maximale et pour l'autre sa valeur minimale.
Ainsi $Z(\Omega)=[\![1;n-1]\!]$.

b. Soit $k\in[\![1;n-1]\!]$. Puisque l'événement $[X=Y]$ est l'événement impossible, les deux événements $[X>Y]$ et $[X<Y]$ forment un système complet d'événements, et par suite, il vient :
$$[Z=k]=([Z=k]\cap[X>Y])\cup([Z=k]\cap[X<Y])\ \text{ cette réunion étant disjointe}$$

c. Soit $k\in Z(\Omega)$. La réunion précédente étant disjointe, il vient :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}([Z=k]\cap[X>Y])+\mathbb{P}([Z=k]\cap[X<Y])\\
&= \sum_{i=k+1}^{n}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i-k])+\sum_{i=1}^{n-k}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=i+k])\\
&= \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{n(n-1)}+\sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n(n-1)}\\
&= \frac{1}{n(n-1)}(n-(k+1)+1)+\frac{1}{n(n-1)}((n-k)-1+)\\
&= \frac{2(n-k)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

d. Z étant une variable aléatoire à support finie, elle admet donc une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} k \times \mathbb{P}([Z = k])$$

Ainsi, il vient :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{n-1} k \times \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(nk - k^2\right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \left(n \times \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) \\
&= n - \frac{2n-1}{3} \\
&= \frac{3n - 2n + 1}{3} \\
&= \frac{n+1}{3}
\end{aligned}$$