Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 0676

1. Pour $n \geq 0$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$.
   Étudier leur convergence.
2. Montrer leur égalité à l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$
3. Calculer I_n.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0676

1. Soit $n \geq 0$. Les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}$ sont continues sur $[0;+\infty[$.
   Les deux intégrales I_n et J_n sont donc seulement impropres en leur borne $+\infty$.

   Étude de la convergence de l'intégrale I_n : on a que : $\forall x \geq 0, \quad 1 + x^n \geq 1$ et $1 + x^2 \geq x^2$.

   Par suite : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \leq \dfrac{1}{x^2}$

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ étant une intégrale de Riemann convergente puisque $2 > 1$, d'après le théorème de comparaison des intégrales impropres des fonctions à valeurs positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$ converge.

   Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$ étant de même nature, on en déduit que I_n est convergente.

   Étude la converence de l'intégrale J_n : on a que : $\forall n \geq 0, \quad \dfrac{x^n}{1+x^n} \leq 1$ et $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

   Par suite : $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \dfrac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \leq \dfrac{1}{x^2}$

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$ étant une intégrale de Riemann convergente puisque $2 > 1$, d'après le théorème de comparaison des intégrales impropres des fonctions à valeurs positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$ converge.

   Les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} \mathrm{d}x$ étant de même nature, on en déduit que I_n est convergente.

2. Le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone de $]0;+\infty[$ dans lui-même pour I_n.

   Par suite, les deux intégrales I_n et $\displaystyle\int_{+\infty}^0 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(1+\frac{1}{u^n}\right)} \left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)$ sont de même nature et égales en cas de convergence ce qui est le cas ici puisque I_n est convergente.

   Il vient donc que :
   $$\begin{aligned} I_n &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(1+\frac{1}{u^n}\right)} \left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) . \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{u^{n+2}}{(1+u^2)(1+u^n)} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= J_n \end{aligned}$$

3. Soit $n \geq 0$. On a directement que :
$$\begin{aligned} 2I_n &= I_n + J_n \\ &\underset{\substack{\text{Les deux intégrales}\\ \text{étant convergentes}}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \text{ et donc } I_n = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4117

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A,B,C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M,N) \in \mathcal{E}, \quad M \times N \in \mathcal{E}$.

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

4. On définir alors l'application $f : \begin{array}{|ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array}$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

b. Vérifier que T est inversible et démontrer alors que f est un automorphisme de E.

c. Est-ce que la matrice T est diagonalisable ?

d. On note F la matrice de f dans la base (A,B,C) de $\mathcal{E}$.

i. Montrer que f admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.

ii. f est-elle diagonalisable ?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4117

1. Il est immédiat que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\,(A,B,C)$ et ainsi $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
La famille (A,B,C) étant une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est elle-même libre, est donc libre.
Par suite (A,B,C) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$. Elle en forme donc une base.

2. Soient $(M,N) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ en écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$.

Un calcul direct donne que $M \times N = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ et donc que $\mathcal{E}$ est stable par produit.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ inversible. Son inverse M^{-1} est donc : $M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et on a directement que $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

4. a. Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.
Il vient alors que :
$$\begin{aligned} f(M_3) &= TM_3T \\ &= T(\lambda M_1 + M_2)T \\ &= (\lambda TM_1 + TM_2)T \\ &= \lambda TM_1T + TM_2T \\ &= \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{aligned}$$
et ainsi, f est linéaire.
De plus, comme par définition $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, f est donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

b. T étant une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, elle est inversible.
f étant un endomorphisme d'un espace $\mathcal{E}$ de dimension finie égale à 3 d'après la première question, par le

théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs, f sera bijectif, si, et seulement si, f est injectif, c'est à dire si son noyau est réduit au vecteur nul de $\mathcal{E}$, en l'occurrence la matrice nulle.

Soit alors $M \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $TMT = (0)$. Comme T est inversible, on en déduit en multipliant par T^{-1} à gauche que $MT = (0)$ puis par T^{-1} à droite que $M = (0)$. Ainsi, le noyau de f est réduit au vecteur nul.

f est donc injectif, et par théorème, f est alors bijectif.

c. La matrice T étant triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres. Ainsi, T ne possède qu'une valeur propre, qui est 1. Elle ne peut être alors diagonalisable, car sinon, T serait semblable à la matrice $1 \times \mathrm{I}_2$, et donc égale à la matrice identité, ce qui n'est clairement pas le cas.

d. **i.** On a directement que $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc que $f(A) = A + B)$, $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc que $f(B) = B$ et $f(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $f(C) = B + C$.

On en déduit donc que la matrice F de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$ est alors : $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de F est par définition $\chi_\lambda(F) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - F)$.

Or ici, on a directement que :
$$\begin{aligned} \chi_\lambda(F) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{Dév. p/r } L_1}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3 \end{aligned}$$

Par suite, F ne possède qu'une seule valeur propre qui est 1 d'ordre de multiplicité 3, ce qui est le cas aussi pour f.

ii. La valeur propre 1 étant d'ordre de multiplicité 3, si la matrice F était diagonalisable elle serait donc semblable à la matrice identité d'ordre 3, et donc compte-tenu de la définition des matrices semblables, elle serait égale à la matrice identité d'ordre 3. Ce qui n'est pas le cas. Ainsi, la matrice F n'est pas diagonalisable, et par suite, f non plus.