Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5308

1. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = 2t - 1$.

2. Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose $I(p, q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer la limite de $I(n, n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

c. En déduire que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I(p, q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

3. a. Pour tout $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$.

Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5308

1. Le changement de variables proposé donne les relations suivantes : $\left\{\begin{array}{ccc} (u = 2t-1) & \Leftrightarrow & \left(t = \dfrac{u+1}{2}\right) \\ (t = 0) & \leftrightsquigarrow & (u = -1) \\ (t = 1) & \leftrightsquigarrow & (u = 1) \\ & \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t & \end{array}\right.$

ce qui amène à :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{2^2 - 2t + 1}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= [\arctan(u)]_{-1}^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. a. On commence par remarquer que la fonction $t \longmapsto t(1-t)$ est une fonction polynôme de degré 2 qui s'annule en 0 et 1, et dont le coefficient du terme de degré 2 est négatif. Ainsi cette dernière est croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{0+1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{0+1}{2}; +\infty\right[$ ce qui assure que cette dernière présente un maximum en $\dfrac{1}{2}$ qui vaut $\dfrac{1}{4}$.

Ainsi, puisque : $\quad \forall t \in [0; 1],\ 0 \leq t(1-t) \leq \dfrac{1}{4}$

il vient : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0; 1],\ 0 \leq (t(1-t))^n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \displaystyle\int_0^1 (t(1-t))^n\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^n \mathrm{d}t$

ce qui donne que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I(n, n) \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Comme $\left|\dfrac{1}{4}\right| < 1$, il vient que $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par le théorème d'encadrement que $I(n,n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b. On effectue l'intégration par parties suivante dans $I(p,q)$:

$$\begin{array}{lcl} u(t) = (1-t)^q & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = -q(1-t)^{q-1} \\ v(t) = \dfrac{1}{p+1}t^{p+1} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = t^p \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1) \\ &= \frac{q}{p+1}I(p+1,q-1) \end{aligned}$$

c. En itérant la formule précdente, il vient que :

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \ldots \times \frac{2}{p+q-1} \times \frac{1}{p+q} I(p+q,0)$$

donc que : $\quad I(p,q) = \dfrac{p!}{p!} \times \dfrac{q}{p+1} \times \dfrac{q-1}{p+2} \times \ldots \times \dfrac{2}{p+q-1} \times \dfrac{1}{p+q} I(p+q,0)$

ce qui donne que $I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0)$.

Par ailleurs, il est immédiat que : $\quad \begin{aligned} I(p+q,0) &= \int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{p+q+1} \end{aligned}$

ce qui amène finalement à : $\quad I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} \times (p+q+1)$

et donc que : $\quad I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

où cette dernière est encore vraie pour $q = 0$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t = 0$ ou $t = 1$, il est clair que $S_n = 0$.

En reprenant les arguments précédents, la fonction $t \longmapsto t(1-t)$ est positive majorée par $\dfrac{1}{4}$ sur $]0;1[$, et donc on en déduit que : $\quad \forall t \in]0;1[\,,\ 2t(1-t) \neq 1$.

Il vient alors que : $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k = \frac{1-(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t(1-t)}$

b. Pour tout $k \in [\![0;k]\!]$, on a : $\quad I(k,k) = \dfrac{(k!)^2}{(2k+1)!}$

Par suite, il vient : $\quad \begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} 2^k I(k,k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 2^k t^k (1-t)^k \,\mathrm{d}t\right) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k t^k (1-t)^k\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t(1-t)} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-2t(1-t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t(1-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-2t+2t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t+2t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$

On peut montrer que $t \longmapsto 2t(1-t)$ est positive majorée par $\frac{1}{2}$ sur $[0;1]$, ce qui assurera que :

$$\forall t \in [0;1]\,,\, 0 \leq \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t+2t^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1-2t+2t^2}$$

et ainsi par positivité et croissance de l'intégrale : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{1-2t+2t^2}\,\mathrm{d}t \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1-2t+2t^2}\,\mathrm{d}t}_{=\frac{\pi}{2}}$

Par passage à la limite, on en déduit donc que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5310

On dit qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est nilpotent s'il existe un entier k tel que $f^k = \tilde{0}$ où l'on rappelle que $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$ et $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si f est un endomorphisme nilpotent, on appelle indice de nilpotence de f le plus plus petit entier p tel que $f^p = \tilde{0}$ où donc $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.

Une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est dite nilpotente si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé est nilpotent. On définit de même son indice de nilpotence.

1. Dans cette question uniquement, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et on suppose que A n'est pas la matrice nulle.
   - **a.** Calculer $A^2 - (a+d)A$ en fonction de I_2.
   - **b.** Montrer que $ad - bc = 0$.
   - **c.** Montrer que $a + d = 0$.
   - **d.** Déterminer alors l'indice de nilpotence de A.
2. Dans cette question uniquement, f désgine un endomorphisme quelconque de $\mathbb{R}^2$.
   - **a.** Montrer que si l'on suppose de plus que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $f^2 = \tilde{0}$.
   - **b.** Étudier la réciproque.
   - **c.** On suppose de plus que f est un endomorphisme nilpotent non nul de $\mathbb{R}^2$. Donner la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$ et celle de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^2$ et qu'il existe deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ non nuls et nilpotents tels que $f = u \circ v$.
   - **a.** Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(u)$ et que $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Ker}\,(f)$.
   - **b.** En déduire que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Im}\,(v)$.
   - **c.** Que peut-on en conclure ?

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5310

1. **a.** Un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}$ pour obtenir ensuite que $A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}$ et donc que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathrm{I}_2 = (0)$.
   - **b.** Supposons que A soit inversible. Comme A est nilpotente d'indice p, on a donc $A^p = (0)$ et donc $A^{-1}A^p = (0)$. Or $A^{-1}A^p = A^{p-1}$ ce qui amène à $A^{p-1} = (0)$, ce qui est contraire à la définition de l'ordre de nilpotence.
     Ainsi, A n'est pas inversible, et par d'après la caractérisation de l'inversibilité des matrices 2×2 par leur déterminant, on a $ad - bc = 0$.
   - **c.** D'après la question précédente, on en déduir que $A^2 = -(a+d)A$. On peut alors conjecturer que $A^n =$

$(-1)^{n+1}(a+d)^n A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, conjecture que l'on peut démontrer par récurrence.
Il vient alors que $A^p = (-1)^{p+1}(a+d)^p A$ avec $A^p = (0)$ ce qui n'est donc possible que si $a+d=0$.

d. Il vient alors que $A^2 = (0)$ avec $A \neq (0)$, ce donc l'indice de nilpotence de A est 2.

2. **a.** On suppose que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$. Montrons que $f^2 = \tilde{0}$, c'est à dire que : $\forall x \in \mathbb{R}^2, f\left(f\left(x\right)\right) = \overrightarrow{0}$.
Soit alors $x \in \mathbb{R}^2$. Il est immédiat que $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f)$, et comme $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et donc $f\left(f\left(x\right)\right) = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, on a bien $f^2 = \tilde{0}$.

b. Supposons que $f^2 = \tilde{0}$. Montrons que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, ce qui revient à montrer que pour tout $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, alors $f(y) = \overrightarrow{0}$.
Soit alors $y \in \mathrm{Im}\,(f)$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = f(x)$. Par suite $f(y) = f\left(f\left(x\right)\right)$ c'est à dire $f(y) = f^2(x)$, et par hypothèse sur f^2, il vient que $f(y) = 0$ et donc que $y \in \mathrm{Ker}\,(f)$, ce qui est le résultat recherché.

c. D'après le théorème du rang, on a : $\underbrace{\dim\left(\mathbb{R}^2\right)}_{=2} = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$.
Comme $f \neq \tilde{0}$ par hypothèse, on a nécessairement $1 \leq \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) \leq 1$.
Comme f est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^2$, d'après ce qui précède on a $f^2 = \tilde{0}$, et d'après léquivalence précédente, on a $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ et donc $1 \leq \dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) \leq 1$.
Par suite, $\mathrm{rg}\,(f) = 1$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = 1$.

3. **a.** D'après ce qui précède l'ordre de nilpotence de f, u et v est égal à 2, et pour chaque endomorphisme on a égalité entre leur noyau et leur image, et ces derniers sont tous de dimension 1.

$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(u)$ **:** Montrons tout d'abord que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(u)$.
Soit $y \in Im(f)$. Montrons que $y \in \mathrm{Im}\,(u)$, c'est à dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = u(x)$.
Comme $y \in \mathrm{Im}\,(f)$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $y = f(x)$, et par construction de f, $y = u\left(v\left(x_0\right)\right)$. En posant $x = v\left(x_0\right)$, on a donc bien que $y = u(x)$ et donc que $y \in \mathrm{Im}\,(u)$.
Or $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont tous deux de dimension 1 d'après ce qui précède. Ainsi, l'inclusion $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Im}\,(u)$ est en réalité une égalité car ces deux sous-espaces sont de même dimension.

$\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(v)$ **:** Montrons tout d'abord que $\mathrm{Ker}\,(v) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$. Par définition de f, on a donc $f(x) = u\left(v(x)\right)$. Comme $v(x) = \overrightarrow{0}$, il vient donc que $f(x) = v\left(\overrightarrow{0}\right)$ et par linéarité de v on a donc que $f(x) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
Or $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(v)$ sont tous deux de dimension 1 d'après ce qui précède. Ainsi, l'inclusion $\mathrm{Ker}\,(v) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$ est en réalité une égalité car ces deux sous-espaces sont de même dimension.

b. On sait que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(v)$ mais on a aussi que $\mathrm{Ker}\,(v) = \mathrm{Im}\,(v)$, donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Im}\,(v)$.
De même, $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(u)$ et on a aussi que $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(u)$, donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(u)$.
Or on a $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f)$, et finalement que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Im}\,(v)$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. On a donc $v(x) \in \mathrm{Im}\,(v)$, et donc $v(x) \in \mathrm{Ker}\,(u)$ ce qui donne que $u\left(v(x)\right) = \overrightarrow{0}$ ou encore que $f(x) = \overrightarrow{0}$.
On en déduit donc que f est l'endomorphisme nul, et par conséquent que la décomposition de f en composée de deux endomorphismes nilpotents non nuls n'est pas possible.