Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 3323

Soient $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

1. $n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. $(n+a)^n - n^n \underset{n\to+\infty}{\sim} (\mathrm{e}^{\,a}-1)\, n^n$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2384

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} u_n \end{cases}$

On se propose dans cet exercice de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1. Montrer par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$.
   En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Soit $f : \left|\begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x)-x \end{array}\right.$
   a. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1;+\infty[$, puis en étudier le signe sur $]-1;+\infty[$.
   b. En déduire les variations de f sur $]-1;+\infty[$.
   c. En déduire alors que : $\forall x \in]-1;+\infty[\,, \quad \ln(1+x) \leq x$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_1 \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

   On pourra commencer par montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) u_n$.
5. On définit la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$.
   a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n \leq 1$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \mathrm{e}\,.$
6. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
7. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un majorant de sa limite.