Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

EX. 1 | Réf. 4662

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X-1)P' - XP'' \end{array} \right.$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

EX. 2 | Réf. 1529

Pour tout entier naturel n, on désigne par I_n l'intégrale : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que, pour tout n : $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n.$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
On pourra utiliser le résultat de la question (2).

b. Calculer u_0.

c. En déduire que, pour tout n : $\quad (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}.$

4. **a.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$
On pourra utiliser le résultat de la question (2).

c. Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire un équivalent de $n\,(I_n)^2$ en $+\infty$.

d. En déduire que la suite $(\sqrt{n}I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\quad \forall u \in [-n;+\infty[, \quad \left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{u}.$

6. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;\sqrt{n}], \quad \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$
Déduire de la question **(6)** un encadrement de J_n à l'aide de n, I_{2n+1} et I_{2n-2}.

8. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$