Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Je m'entraîne à rédiger

EX. 1 | Réf. 4400

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Soient X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires indépendantes définie sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes la loi uniforme sur l'ensemble $[\![1;n]\!]$.
On désigne alors par Y la variable aléatoire égale au maximum des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n, c'est à dire que $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4401

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Un sac contient n jetons.
On tire successivement et sans remise deux jetons de ce sac.
On désigne par X la variable aléatoire égale au premier numéri tiré, et Y la variable aléatoire égale au deuxième numéro tiré.

1. Identifier la loi de X et donner $\mathbb{E}(X)$.

2. Déterminer la loi de Y et donner $\mathbb{E}(Y)$.

3. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. On définit la variable aléatoire Z par : $Z = |X - Y|$.

- **a.** Expliciter le support $Z(\Omega)$ de Z.
- **b.** Soit $k \in Z(\Omega)$. Justifier que $[Z = k] = ([Z = k] \cap [X > Y]) \cup ([Z = k] \cap [X < Y])$.
- **c.** En déduire la loi de Z.
- **d.** Justifier que Z admet une espérance puis la calculer.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 1400

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, ..., deux boules portant le numéro n.
On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre nécesaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i^{e} paire de boules portant le même numéro, à partir d'une $(i-1)^{\text{e}}$ paire de boules.

1. **a.** Quelle relation lie X_n à Y_1, Y_2, …, Y_n ?
   b. Déterminer la loi de Y_1.
   Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1;n]\!]$ la loi de Y_i. Quelle est son espérance.
   c. En déduire que $\mathbb{E}\left(X_n\right) = n^2$.
2. **a.** Dans le cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.
   b. On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}\left([X_3 = k]\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. On revient au cas général.
   a. Montrer que $\mathbb{P}\left([X_n = n]\right) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.
   b. Exprimer $\mathbb{P}\left([X_n = n+1]\right)$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.