Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5307

Dans tout cet exercice, a désigne un réel non nul et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, puis déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{Id}_3 = (0)$.

2. Montrer que la matrice A est inversible, et en donner son inverse.

3. Déterminer une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction des matrices A et I_3.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5306

On considère la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [1;\mathrm{e}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{\ln(x)+1} \end{array} \right.$

et la fonction g donnée par : $g : \left| \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{2y}{(1+y)^2} \end{array} \right.$

1. Démonter que : $\forall y \in [0;1]\,,\ 0 \leq g(y) \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Montrer que l'intervalle $[1;\mathrm{e}]$ est stable par f, c'est à dire que : $\forall x \in [1;\mathrm{e}]\,,\ f(x) \in [1;\mathrm{e}]$.

3. Déduire des questions précédentes, que :

$$\forall (x,y) \in [1;\mathrm{e}] \times [1;\mathrm{e}]\,,\ |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

4. On désigne alors par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite donnée par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

On admettra que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1;\mathrm{e}]$

a. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \mathrm{e}| \leq \dfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}$

b. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c. Déterminer un rang n à partir duquel u_n est une approximation de e au millième près.